

本書の概要

和算には、累円術と呼ばれる多くの円や球が外接や内接している難問が多く、本書で解説する反転法を利用しないと、簡単には解けない。反転法は、任意の点を、その点から原点までの距離の逆数に比例する距離に移す、という写像変換の一手法である。難しそうに聞こえるが、反転写像の作図と簡単な反転原理の基本式さえ理解すれば、高校生でも反転法で解ける算額の難問に挑戦できるようになる。反転法を使いこなすには、高校数学の知識だけで十分なのである。

実は、すでに江戸時代に、反転法とよく似た算変法という手法が和算家、法道寺善により完成されている。算変法の解き方は現代手法と多少異なるが、反転不変式を用いるという点では同じである。そこで本書では法道寺善著『観新考算変』原本の現代語訳と、そこにある問題を反転法と算変法の両方で解く方法を示した。

本書は、いわば図形問題を反転法で解けるようになるためのハウツー本である。数学を楽しみたい人、和算を知りたい人が、反転法とは何かを知り、その面白さ、有効性を理解し、使用できるようになることを主たる目的としている。このため、解き方もかなりマニュアル化されている。また、途中の数式変形もあまり省略せずに示した部分が多い。それは高校数学から改めて勉強しようとする人には、式変形の手順を思い起こせるように、そして式変形に慣れた人には、目で追うだけで読めるようにしたためである。

本書で扱う図すべての反転図を作成できる PC フリーソフトも紹介している。

目 次

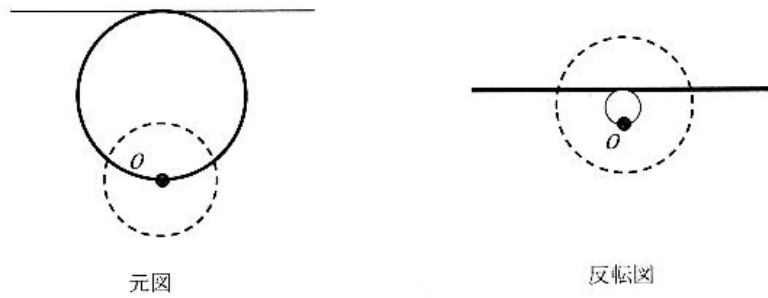
まえがき	3
本書を読まれる方へ	6
第1章 反転法の基礎	8
1-1 はじめに	8
本書で必要な基本知識	8
1-2 反転とは ー反転の定義ー	10
1-3 作図による反転	12
1-4 反転法の定理と幾何学的証明	15
1-5 基本定理の解析的証明	24
1-6 補足説明 反転像の相似性と反転基本式	26
1-7 反転図の作り方 ー例題と練習ー	28
- その 1 - 反転円を含めた作図基本練習	28
- その 2 - 反転円を用いない作図基本練習	33

- その 3 - 作図応用練習	35
第 2 章 反転法の解き方 - 例題と練習 -	38
2-1 反転法の解き方の手順	38
2-2 基本問題	38
2-3 反転法のいろいろな応用	54
第 3 章 立体の反転法	63
3-1 球および平面の反転定理	63
3-2 球反転法の例題練習	65
第 4 章 算変法の基礎	76
4-1 算変法とは	76
4-2 算変法の基本式と証明	76
4-3 算変法による解き方の手順	83
4-4 『観新考算変』の問題の反転法と算変法による解法	84
『観新考算変』土屋本 (対訳と § 4-4 の注釈付)	(110 - 136) 逆頁
第 5 章 算変法と反転法の総合問題	138
第 6 章 反転法で解ける算額問題選	151
付録 和算図形問題の初歩練習	178
紹介 反転作図フリーソフトについて	186
参考資料	191
あとがき	193
索引	194

見本 1

第 1 章 反転図の作り方

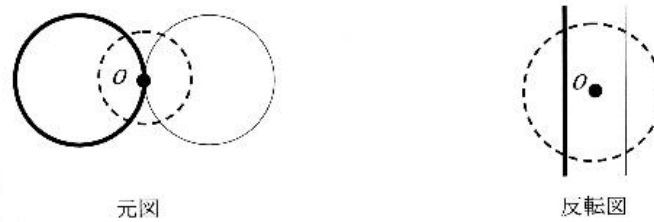
例題 2



【要点】

中心を通らない直線は中心を通る円に移り、中心を通る円は中心を通らない直線に移る。さらに元の直線と円は接しているので、反転の像も接する。直線が反転円の外側にあるので、反転の像の円は反転円の中に移る。

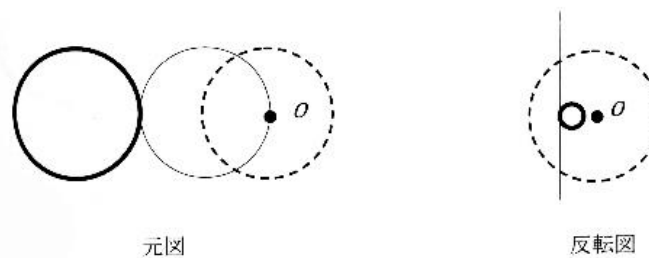
例題 3



【要点】

中心を通る円は中心を通らない直線に移る。2円が接しているときは平行線になる。

例題 4



【要点】

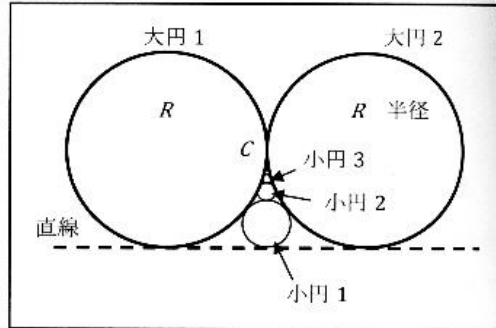
2円は接しているなので、反転した像の直線と円も接する。

見本2

第2章 反転法の解き方

練習問題 2-2 ★

右図のように半径 R の大円 2 個とそれに接する直線との間に小円を逐次入れて行く。最初の小円を第 1 円とすると、 n 番目の小円の半径 r_n を求めよ。



【反転法による解法】

等しい大円どうしの接点 C で反転すると右の反転図を得る。反転像の小円半径を a とすると、

$$a = \frac{1}{2R} \quad \dots \textcircled{1}$$

C から各小円への接線の長さ t_n は、

$$t_1^2 = (3a)^2 - a^2$$

$$t_2^2 = (5a)^2 - a^2$$

.....

$$t_n^2 = ((2n+1)a)^2 - a^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

よって、反転基本式 1 で円径に半径を用いると、

$$r = \frac{1}{t^2} a \text{ より,}$$

$$r_1 = \frac{a}{(3a)^2 - a^2}$$

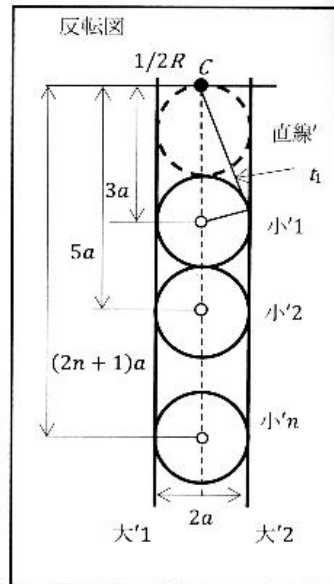
$$r_2 = \frac{a}{(5a)^2 - a^2}$$

.....

$$r_n = \frac{a}{((2n+1)a)^2 - a^2} = \frac{1}{(4n^2 + 4n)a}$$

$$= \frac{2R}{4n(n+1)}$$

ゆえに n 番目の小円半径は、 $r_n = \frac{R}{2n(n+1)}$ である。



例題 5 算額問題から ★★★

『群馬の算額』No.106 倉賀野神社から算変基本式 1 を使う問題例を取り上げる。慶応元年(1865)にこの算額を奉納した木暮三右衛門は算変法の発案者法道寺善の門人である。

(題意)

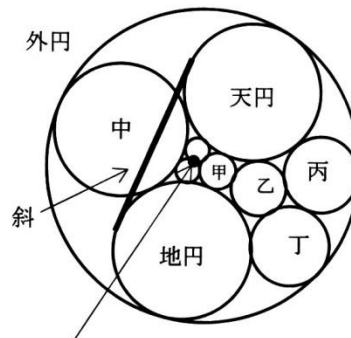
図のように外円内に 9 円を容れる。天円径 9 寸, 地円径 16 寸のとき, 天円と地円の共通接線である斜の長さはいくらか。

注 小円 2 個の径は等しくない。

(答) 15 寸

(術) $\frac{5}{4}\sqrt{\text{天} \cdot \text{地}} = \text{斜}$

この答術を導け。



小円上下 2 個 その接点を O とする。

算変法による解法

天円と地円の間にある小円 2 個の接点 O で反転する。

最初に, 反転図の甲', 乙', 丙', 天'の各円径比を求め
る。甲'円半径を 1 とし, 各円の半径を乙'(b), 丙'(c),
天'(a)とする。図中の破線で囲んだ長方形について
縦方向の長さ: $2a + 2c = 1$

$$\therefore 2a = 1 - 2c \quad \dots \textcircled{1}$$

横方向の長さ:

$$2\sqrt{a} = 1 + b + \sqrt{(b+c)^2 - c^2}$$

$$\therefore 2\sqrt{a} = 1 + b + \sqrt{b^2 + 2bc} \quad \dots \textcircled{2}$$

丙'円下端と乙'円中心との距離:

天'乙', 丙'乙'の中心間距離に対する三平方の定理から,

$$\sqrt{(a+b)^2 - (a+2c)^2} = \sqrt{(b+c)^2 - c^2} \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{3} \text{より,} \quad 4c^2 + 4ac - 2ab + 2bc = 0$$

$$\textcircled{1} \text{を代入し,} \quad 4c^2 + 2(1-2c)c - (1-2c)b + 2bc = 0$$

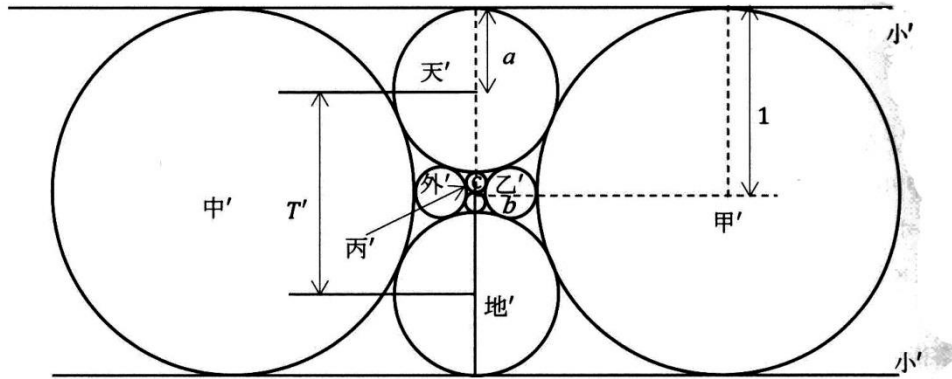
$$\therefore b = \frac{2c}{1-4c} \quad \dots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{2} \text{より,} \quad \sqrt{4a} = 1 + b + \sqrt{b^2 + 2bc} \quad \therefore \sqrt{2-4c} - 1 - b = \sqrt{b^2 + 2bc}$$

$$\text{平方して,} \quad 3 - 4c + 2b - 2(1+b)\sqrt{2-4c} = 2bc$$

術曰 (天地)円径相乗開平方五因 四帰得斜合問	答曰 斜一十五寸	今有如図円内容九円天円径九寸 地円径一十六寸斜幾何
----------------------------	----------	------------------------------

第5章 算変法と反転法の総合



反転図 (例題 5)

④を代入して,

$$3 - 4c + 2 \frac{2c}{1-4c} - 2 \left(1 + \frac{2c}{1-4c} \right) \sqrt{2-4c} = 2 \frac{2c}{1-4c} c$$

$$3 \frac{(2c-1)^2}{1-4c} = 2 \frac{(1-2c)}{1-4c} \sqrt{2-4c}$$

$$\therefore 3(1-2c) = 2\sqrt{2-4c}$$

$$3\sqrt{1-2c} = 2\sqrt{2}$$

$$\therefore c = \frac{1}{18}$$

$$\text{①より, } 2a = 1 - 2c = \frac{8}{9} \quad \therefore a = \frac{4}{9}$$

算変基本式 1: $\frac{\text{斜}^2}{\text{天地}} = \frac{T'^2}{\text{天'地'}}$ において

$$\frac{T'^2}{\text{天'地'}} = \frac{(2-2a)^2}{4a^2} = \left(\frac{1-a}{a} \right)^2 = \left(\frac{5}{4} \right)^2 \quad \text{ゆえ, } \frac{\text{斜}}{\sqrt{\text{天地}}} = \frac{5}{4}$$

よって, 斜 = $\frac{5}{4} \sqrt{\text{天地}}$ を得る。天=9寸, 地=16寸を代入すると, 斜=15寸となり, 術, 答ともに一致する。