本書の概要

和算には、累円術と呼ばれる多くの円や球が外接や内接している難問が多く，本書で解説する反転法を利用しないと，簡単には解けない。反転法は、任意の点を，その点から原点までの距離の逆数に比例する距離に移す，という写像変換の一手法である。難しそうに聞こえるが，反転写像の作図と簡単な反転原理の基本式さえ理解すれば，高校生でも反転法で解ける算額の難問に挑戦できるようになる。反転法を使いこなすには，高校数学の知識だけで十分なのである。

実は、すでに江戸時代に，反転法とよく似た算変法という手法が和算家，法道寺善により完成されている。算変法の解き方は現代手法と多少異なるが，反転不変式を用いるという点では同じである。そこで本書では法道寺善著『観新考算変』原本の現代語訳と，そこにある問題を反転法と算変法の両方で解く方法を示した。

本書は，いわば図形問題を反転法で解けるようになるためのハウツー本である。数学を楽しみたい人，和算を知りたい人が，反転法とは何かを知り，その面白さ，有効性を理解し，使用できるようになることを主たる目的としている。このため、解き方もかなりマニュアル化されている。また、途中の数式変形もあまり省略せずに示した部分が多い。それは高校数学から改めて勉強しようとする人には，式変形の手順を思い起こせるように，そして式変形に慣れた人には，目で追うだけで読めるようにしたためである。

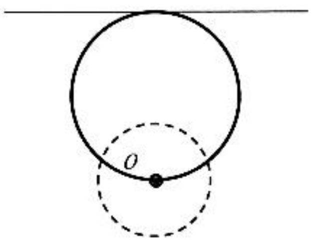
本書で扱う図すべての反転図を作成できる PC フリーソフトも紹介している。

目　　次

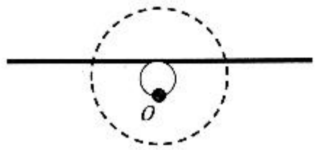
見本１

第１章 反転図の作り方

例題２



元図

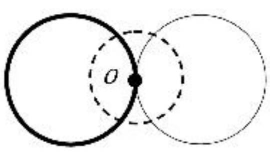


反転図

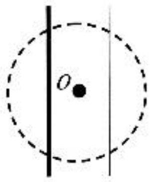
【要点】

中心を通らない直線は中心を通る円に移り，中心を通る円は中心を通らない直線に移る。さらに元の直線と円は接しているので，反転の像も接する。直線が反転円の外側にあるので，反転の像の円は反転円の中に移る。

例題３



元図

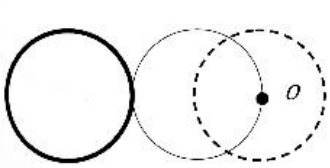


反転図

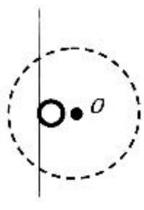
【要点】

中心を通る円は中心を通らない直線に移る。2円が接しているときは平行線になる。

例題４



元図



反転図

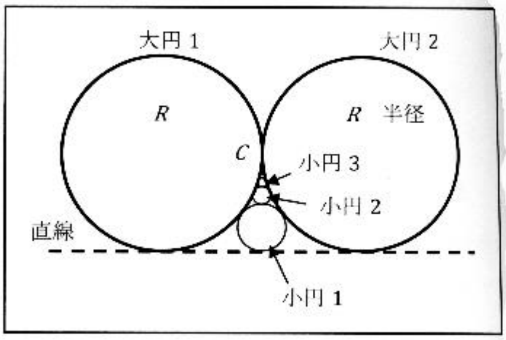
【要点】

2円は接しているので，反転した像の直線と円も接する。

見本２

練習問題 2-2　★

右図のように半径 R の大円 2 個とそれに接する直線との間に小円を逐次入れて行く。最初の小円を第 1 円とするとき，n 番目の小円の半径 r_n を求めよ。



【反転法による解法】

等しい大円どうしの接点 C で反転すると右の反転図を得る。反転像の小'円半径をaとすると，

$$a=\frac{1}{2R} \qquad \cdots \ ①$$

Cから各小'円への接線の長さ t_n は，

$${t_1}^2=(3a)^2-a^2$$
$${t_2}^2=(5a)^2-a^2$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$${t_n}^2=\left((2n+1)a\right)^2-a^2 \qquad \cdots \ ②$$

よって，反転基本式 **1** で円径に半径を用いると，

$$r=\frac{\mathbf{1}}{t^2}\,a \text{ より，}$$

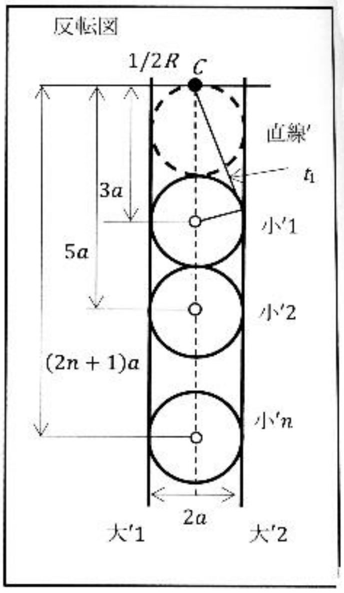
$$r_1=\frac{a}{(3a)^2-a^2}$$

$$r_2=\frac{a}{(5a)^2-a^2}$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$r_n=\frac{a}{\left((2n+1)a\right)^2-a^2}=\frac{\mathbf{1}}{(4n^2+4n)a}$$

$$=\frac{2R}{4n(n+1)}$$



ゆえに　n番目の小円半径は，　$r_n=\dfrac{R}{2n(n+1)}$　である。

例題５　　算額問題から　★★★

『群馬の算額』No.106 倉賀野神社から算変基本式１を使う問題例を取り上げる。慶応元年(1865)にこの算額を奉納した木暮三右衛門は算変法の発案者法道寺善の門人である。

(題意)

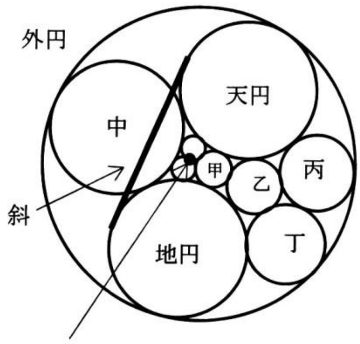
図のように外円内に９円を容れる。天円径９寸，地円径16寸のとき，天円と地円の共通接線である斜の長さはいくらか。

注　小円２個の径は等しくない。

(答)　　15寸

(術)　　$\dfrac{5}{4}\sqrt{天\cdot地} = 斜$

この答術を導け。



小円上下２個　その接点をOとする。

今有如図円内容九円天円径九寸
地円径一十六寸斜幾何
答曰　斜一十五寸
術曰　(天地)円径相乗開平方五因
四帰得斜合問

<u>算変法による解法</u>

天円と地円の間にある小円２個の接点Oで反転する。

最初に，反転図の甲′，乙′，丙′，天′の各円径比を求める。甲′円半径を１とし，各円の半径を乙′(b)，丙′(c)，天′(a)とする。図中の破線で囲んだ長方形について

縦方向の長さ：　$2a + 2c = 1$

$$\therefore\ 2a = 1 - 2c \qquad \cdots\ ①$$

横方向の長さ：

$$2\sqrt{a} = 1 + b + \sqrt{(b+c)^2 - c^2}$$

$$\therefore\ 2\sqrt{a} = 1 + b + \sqrt{b^2 + 2bc} \qquad \cdots\ ②$$

丙′円下端と乙′円中心との距離：

天′乙′，丙′乙′の中心間距離に対する三平方の定理から，

$$\sqrt{(a+b)^2 - (a+2c)^2} = \sqrt{(b+c)^2 - c^2} \qquad \cdots\ ③$$

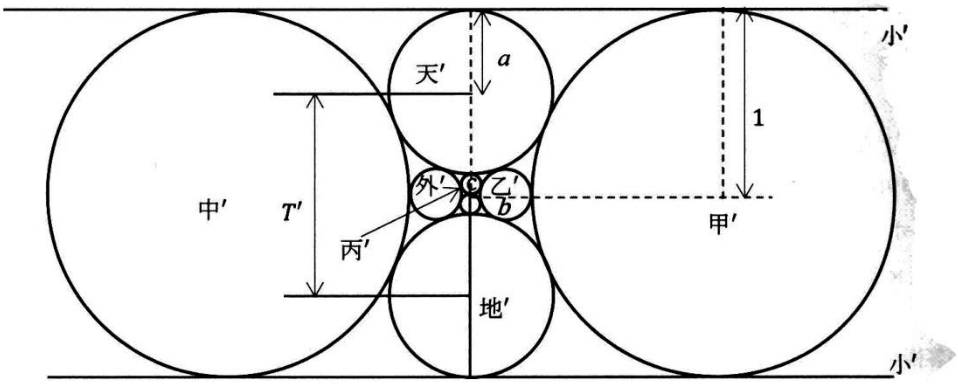
③より，　　$4c^2 + 4ac - 2ab + 2bc = 0$

①を代入し，　　$4c^2 + 2(1-2c)c - (1-2c)b + 2bc = 0$

$$\therefore\ b = \frac{2c}{1-4c} \qquad \cdots\ ④$$

②より，　$\sqrt{4a} = 1 + b + \sqrt{b^2 + 2bc}$　　$\therefore\ \sqrt{2-4c} - 1 - b = \sqrt{b^2 + 2bc}$

平方して，　$3 - 4c + 2b - 2(1+b)\sqrt{2-4c} = 2bc$



反転図（例題 5）

④を代入して，

$$3-4c+2\frac{2c}{1-4c}-2\left(1+\frac{2c}{1-4c}\right)\sqrt{2-4c}=2\frac{2c}{1-4c}c$$

$$3\frac{(2c-1)^2}{1-4c}=2\left(\frac{1-2c}{1-4c}\right)\sqrt{2-4c}$$

$$\therefore\quad 3(1-2c)=2\sqrt{2-4c}$$

$$3\sqrt{1-2c}=2\sqrt{2}$$

$$\therefore\quad c=\frac{1}{18}$$

①より，　$2a=1-2c=\dfrac{8}{9}\quad\therefore\quad a=\dfrac{4}{9}$

算変基本式 1：　$\dfrac{斜^2}{天地}=\dfrac{T'^2}{天'地'}$　において

$$\frac{T'^2}{天'地'}=\frac{(2-2a)^2}{4a^2}=\left(\frac{1-a}{a}\right)^2=\left(\frac{5}{4}\right)^2\qquad ゆえ，\quad \frac{斜}{\sqrt{天地}}=\frac{5}{4}$$

よって，斜 $=\dfrac{5}{4}\sqrt{天地}$　を得る。天＝9 寸，地＝16 寸を代入すると，斜＝15 寸となり，術，答ともに一致する。