反転法と算変法（サンプル）

―高校数学で解く日本の図形問題

第 2 章　反転法の解き方　－例題と練習－

ここでは図形問題を反転法で解くときの基本的な手順といくつかの例題を取り上げる。

２－１　反転法の解き方の手順

Ⅰ．反転中心をうまく選び，できるだけ簡潔な反転図をつくる。反転図がいくつかの円で構成されている場合には，それらの円の円径比を幾何学的(和算的)に計算する。その計算を容易にする上でも，できるだけシンプルな反転図とするのがよい。また，Oからの距離が分かる場合には，それも反転図中に書き込むこと。

Ⅱ．反転図で，円径を求めたい円の反転像(円)へ向かって反転中心 Oから接線を引き，Oと円の接点までの接線の長さt'および反転像の円の径r'を求める。

Ⅲ．反転基本式 1　　$r = \frac{1}{t'^2} r'$　　(反転定数 $k = 1$)

により，求めたい円の実半径rを計算する。ただし，反転中心 Oが求めたい円内にあるときは基本式 1 補足 p.17 にある長さt'を使用する。(t'^2 の計算では方べきの定理(§1-1 の 1)を用いればよい。)

２－２　基本問題

例題 2　★

関孝和著『発微算法』第一問に関係した問題

問題 図 2-2a の元図ように，外円内に中小の円 3 個を容れる。外円直径はa，中円直径は bであるとき，小円直径 cはいくらか。

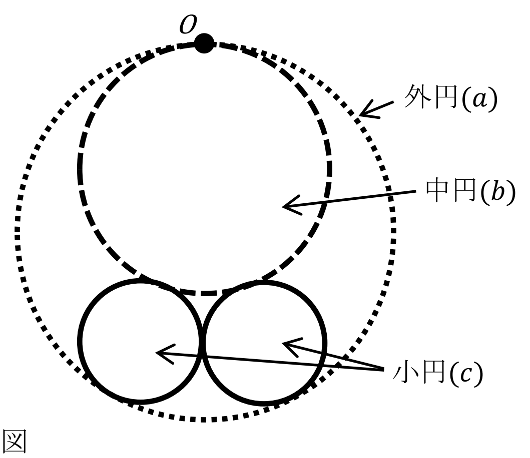

図 2-2a　元図

【反転法による解法】

まず反転中心である原点 O を決める。どこに中心 O を置くかは，反転図ができるだけ簡単になる，という観点で決める。簡単でないと，その後の計算が複雑になってしまう場合が多い。最適な反転中心を見つけるポイントは，一つは図の対称軸上にある円と直線や円どうしの接点および直線の交点である。二つは円径が条件として与えられている円の接点にとることである。本問題では，一番上にある外円と中円の接点におくのが良い。

外円と中円は原点を通るから，§1-4 定理 2 より平行な 2 直線となる。それらの原点からの距離は　k^2/a ，k^2/b　(kは反転定数)である。

2 個の小円の反転は，平行線の間に入る 2 円となる。原点と円の中心を結ぶ線は，元図も反転図も同じであること, 接点の関係(どの円とどの円が接しているか)に注意しつつ反転図を作ると。図 2-2b が得られる。

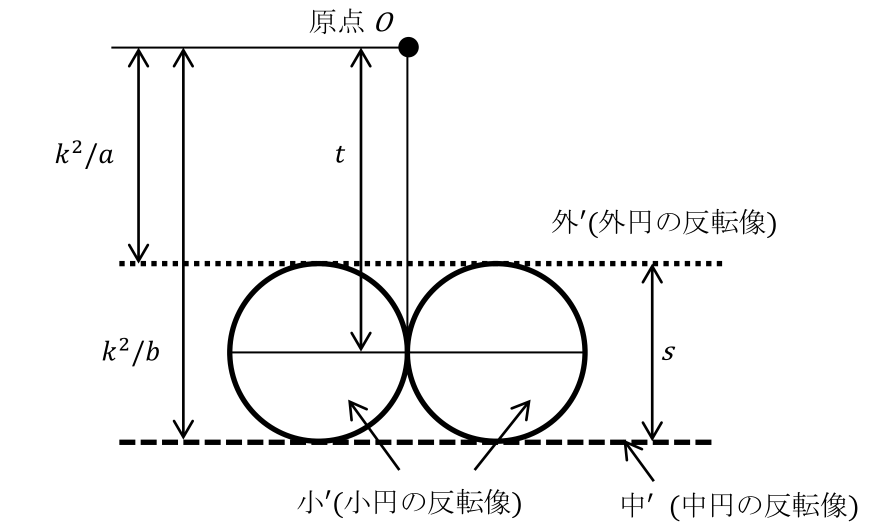

図 2-2b　反転図

元図の小円直径を得るには，反転図(図 2-2b)で原点 O から小′円(像)に引いた接線の長さ t と，小′円(像)の直径 s を求める必要がある。

反転図より,

$$s=\frac{k^2}{b}-\frac{k^2}{a}\ ,\qquad t=\left(\frac{k^2}{b}+\frac{k^2}{a}\right)\frac{1}{2} \qquad \cdots\quad ①$$

となる。

§1 − 4 定理 1 p. 15 の反転基本式 1　$r=\dfrac{k^2}{t'^2}r'$ は,

$$\text{元図の実円径}=\frac{k^2}{\left(\text{反転像円への接線の長さ}\right)^2}\ \text{反転像円径}$$

と解釈して，(この式の円径は半径，直径のどちらかに統一して用いればよい。)

$$\text{小円直径：}\quad c = \frac{k^2}{t^2} s \qquad \cdots \quad ②$$

とする。①を②に代入して，

$$c = \frac{k^2}{\left(\frac{k^2}{b} + \frac{k^2}{a}\right)^2 \frac{1}{4}} \left(\frac{k^2}{b} - \frac{k^2}{a}\right) = \frac{1}{\left(\frac{a+b}{2ab}\right)^2} \left(\frac{a-b}{ab}\right)$$

よって答の小円直径は，

$$c = \frac{a-b}{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2} ab \qquad \cdots \quad ③$$

となる。ここで注目して欲しい点は，③の結果に反転定数kが全く含まれていないことである。すなわちkの値は結果的に消去されてしまうので，§1-2 で述べたように，kは任意でよいということになる。ならば，最初から$k = 1$とおいた方が式は簡単になり，演算も容易になる，という訳で，ほとんどの場合で，$k = 1$と置くのである。

本問題の通常の和算的解法は計算が結構大変である。一方，反転法による解法の計算はかなり簡単である。

コラム２　関孝和著『発微算法』

例題 2 の図 2-2a は沢口一之の遺題(解答なしの巻末問題)で現れる図と同じで，関孝和が解いたものを建部賢弘(たけべかたひろ)が『發微算法演段諺解(げんかい)』(1685 年)で詳しく解説している。問題の設定は違うが，本質的には同じで，かなり面倒な計算が必要となる。なお，径は直径のことである。


發微算法
○古今算法記一十五問之荅術
平圓解空問 一問
今有平圓内如圖平圓空三箇外餘
寸平積百二十歩只云從中圓徑寸
而小圓徑寸者短五寸問大中小圓
徑幾何
○荅曰依左術得小圓徑
術曰立天元一為小圓徑加入云數為中圓徑自之
得數寄甲位○列小圓徑自之得數倍之加入甲位
以圓周率乘之得數寄乙位○列外餘積四之以圓

發微算法演段諺解 元
四
徑率乘之得數加入乙位為因圓周率大圓徑冪寄
内位○列小圓徑以甲位相乘亦以圓周率相乘得
數寄丁位○列中圓徑四之得内減小圓徑餘以丙
位乘之得内減丁位餘自乘之為因中圓徑四箇與
小圓徑二箇和冪因中圓徑冪因圓周率冪大圓徑
冪寄左○列併中圓徑四箇與小圓徑二箇得數自
之以甲位相乘亦以丙位相乘亦以圓周率相乘得
數與寄左相消得開方式五乘方飜法開之得小圓
徑仍推前術得大中圓徑各合問

例題 3　　★

例題 2 は敢えて反転法に依らなくても，練習問題 2-1 のように三平方の定理を用いて，多少面倒ではあるが解くことができる。それでは，図 2-3a のように小円の数をもっと増やしたらどうなるだろうか。実は，このような問題こそ反転法による解法が最も向いており，その力が十分に発揮される。

$\boxed{\text{問題}}$　図のように，外円(直径a)内に中円(直径 b)を容れ，その隙間に小累円(小円の集まり)を左右対称に$2n$個容れる。最初の小円から数えてn番目の小累円の直径 c_n はいくらか。

この問題を見たら，大抵の人はその複雑さから，解答するのを諦めてしまうのではないだろうか。しかし反転法を用いると，意外と簡単に解くことができる。

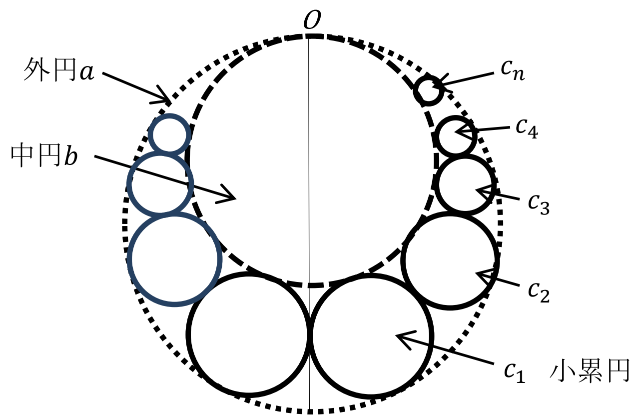

図 2-3a　元図

【反転法による解法】

反転定数は任意でよいので，単純に $k=1$とする。反転図は例題 2 からの類推により図 2-3b となるのが分かるであろう。注目して欲しい点は，元図の小累円径は異なるのに，反転した像の累′円は全て同一の径になることである。

以下、略