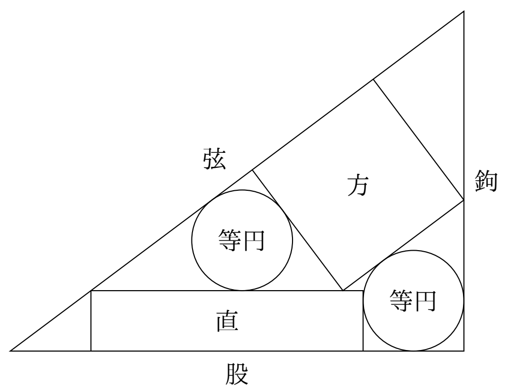
群和研・令和 5 年 2 月の問題 - No.1

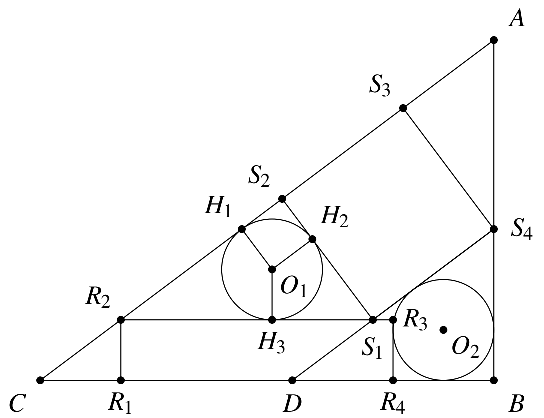
問題

図のように，直角三角形の中に正方形と長方形および等円 2 個が容れてある．鉤が 27 寸，股が 36 寸のとき，等円の直径を求めよ．

『茨城の算額』6 – 1　板橋不動願成寺　第 1 問から作成

図





$A(0,3)$，$B(0,0)$，$C(-4,0)$，$D(-\frac{16}{9},0)$

$S_1(-\frac{16}{15},\frac{8}{15})$，$S_2(-\frac{28}{15},\frac{8}{5})$，$S_3(-\frac{4}{5},\frac{12}{5})$，$S_4(0,\frac{4}{3})$

$R_1(-\frac{148}{45},0)$，$R_2(-\frac{148}{45},\frac{8}{15})$，$R_3(-\frac{8}{9},\frac{8}{15})$，$R_4(-\frac{8}{9},0)$

$O_1(-\frac{88}{45},\frac{44}{45})$，$O_2(-\frac{4}{9},\frac{4}{9})$

$r=\frac{4}{9}$

解法

1）直角三角形 $\triangle ABC$ の 3 辺の比

$AB=27$，$BC=36$ より，$CA=45$ となる．

$$AB:BC:CA=3:4:5$$

2）直角三角形 $\triangle S_1S_2R_2$ の 3 辺

1 より，$S_1S_2=3l$，$S_2R_2=4l$，$R_2S_1=5l$ とする．

底辺 × 高さ ÷ 2 より

$$S=S_1S_2\cdot S_2R_2\cdot\frac{1}{2}=6l^2$$

等円（内接円 O_1）の半径 r とすると

$$S=(S_1S_2+S_2R_2+R_2S_1)\cdot r\cdot\frac{1}{2}=6lr$$

よって

$$l=r$$

$$S_1S_2=3r,\ S_2R_2=4r,\ R_2S_1=5r$$

3）S_4A

正方形より，$S_1S_2=S_3S_4$

$$S_3S_4=3r$$

$S_3S_4:S_4A=4:5$ より

$$S_4A=\frac{15}{4}r$$

4）点 D

S_4S_1 の延長線と BC の交点を D とする．

$$\triangle S_1S_2R_2\equiv\triangle S_4BD\text{（合同）}$$

5）S_4B

4 より，$S_1S_2=S_4B$

$$S_4B=3r$$

6）AB

3，5，鉤 = 27 より

$$AB=S_4A+S_4B=\frac{27}{4}r=27\ \rightarrow\ r=4$$

7）等円の直径

6 より

等円の直径 $=2r=8$

答え

等円の直径 = 8 寸