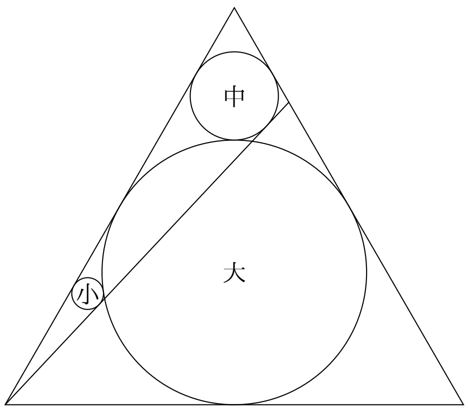
群和研・令和 5 年 2 月の問題 - No.2

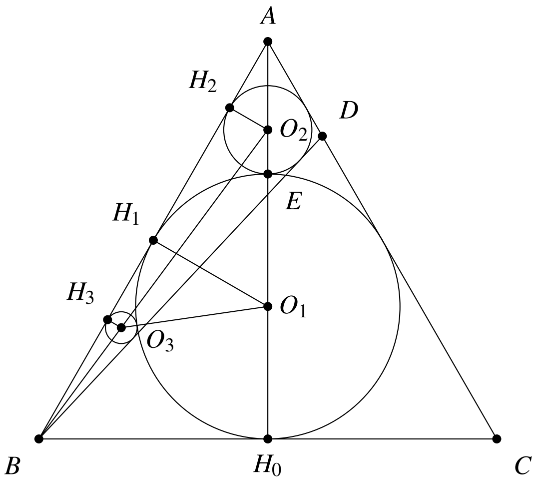
問題

図のように，正三角形の中に大円および中円を容れ，線分を正三角形頂点から中点に接するように引き，この線分と大円，正三角形に接するように小円を容れる．小円の直径が 9 寸のとき，中円の直径を求めよ．

『茨城の算額』6 − 3　板橋不動願成寺　第 3 問から作成

図





$A(3,0)$，$B(-\sqrt{3},0)$，$C(\sqrt{3},0)$，$D(\frac{5\sqrt{3}}{21},\frac{16}{7})$，$E(0,2)$
$H_0(0,0)$，$H_1(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2})$，$H_2(-\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{5}{2})$，$H_3(-\frac{7\sqrt{3}}{10},\frac{9}{10})$
$O_1(0,1)$，$O_2(0,\frac{7}{3})$，$O_3(-\frac{16\sqrt{3}}{25},\frac{21}{25})$
$r_1=1$，$r_2=\frac{1}{3}$，$r_3=\frac{3}{25}$

解法

1）O_2E（中円の半径）

大円の半径を r（$r>0$）とする．大円の中心 O_1 は，正三角形 $\triangle ABC$ の重心であることから

$$O_1H_0 : AH_0 = O_2E : AE \ \rightarrow\ r : 3r = O_2E : r$$
$$O_2E = \frac{1}{3}r\ \ (= O_2H_2)$$

2）H_2A

直角三角形 $\triangle H_2AO_2$にて，$\angle H_2AO_2 = 30^\circ$ より

$$H_2A = \sqrt{3}\cdot O_2H_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}r$$

3）BA

２と同様に．$\angle H_2AO_2 = 30^\circ$ より

$$BA = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot AH_0 = 2\sqrt{3}r$$

4）H_1H_2

一直線上の 2 接円に関する和算公式より

$$H_1H_2 = 2\sqrt{O_1H_1\cdot O_2H_2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}r$$

5）H_3H_1

小円の半径を ar（$a>0$）とし，４と同様に

$$H_3H_1 = 2\sqrt{O_3H_3\cdot O_1H_1} = 2\sqrt{a}\,r$$

6）BH_3

２ ～ ５より

$$BH_3 = BA - H_2A - H_1H_2 - H_3H_1 = (\sqrt{3}-2\sqrt{a})r$$

7）小円の直径

相似関係 $\triangle O_3H_3B \sim \triangle O_2H_2B$ から

$$O_3H_3 : BH_3 = O_2H_2 : BH_2 (= BA - H_2A)$$
$$ar : (\sqrt{3}-2\sqrt{a})r = \frac{1}{3}r : \left(2\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)r$$
$$5\sqrt{3}(\sqrt{a})^2 + 2\sqrt{a} - \sqrt{3} = 0$$
$$\sqrt{a} = -\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{5}\quad（\sqrt{a}>0 \text{ より前者は不適}）$$
$$a = \frac{3}{25}$$

小円の直径 = 9 より

$$2ar = 9 \ \rightarrow\ \text{大円の直径} : 2r = 75$$

8）中円の直径

$$\text{中円の直径} = \frac{1}{3}\cdot 2r = 25$$

答え

小円の直径 = 9 寸
中円の直径 = 25 寸　· · ·　答え
大円の直径 = 75 寸