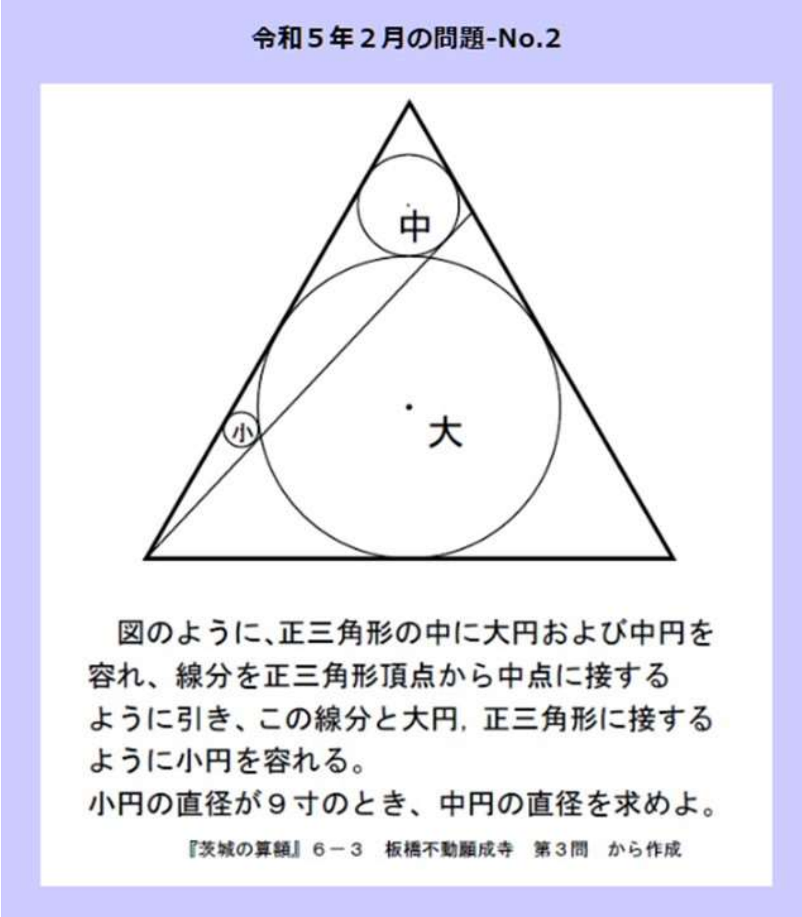
２０２３年２月５日
横田＠ＥＬ３科学アカデミー

群馬県和算研究会　令和５年２月の問題-No.２の解答

解答



問題文の「正三角形頂点から中点に接するように」を「正三角形頂点から中円に接するように」と読み替えて、解く。

小円の半径を r_1、中円の半径を r_2、大円の半径を r_3とする。

正三角形の高さは、大円の中心から頂点までの長さが $2r_3$なので、$3r_3$である。また、１辺の長さは、$2\sqrt{3}r_3$である。

中円は、図１に示すように、高さが r_3である正三角形に内接するので、その半径は、

$r_2 = \frac{1}{3}r_3$である。

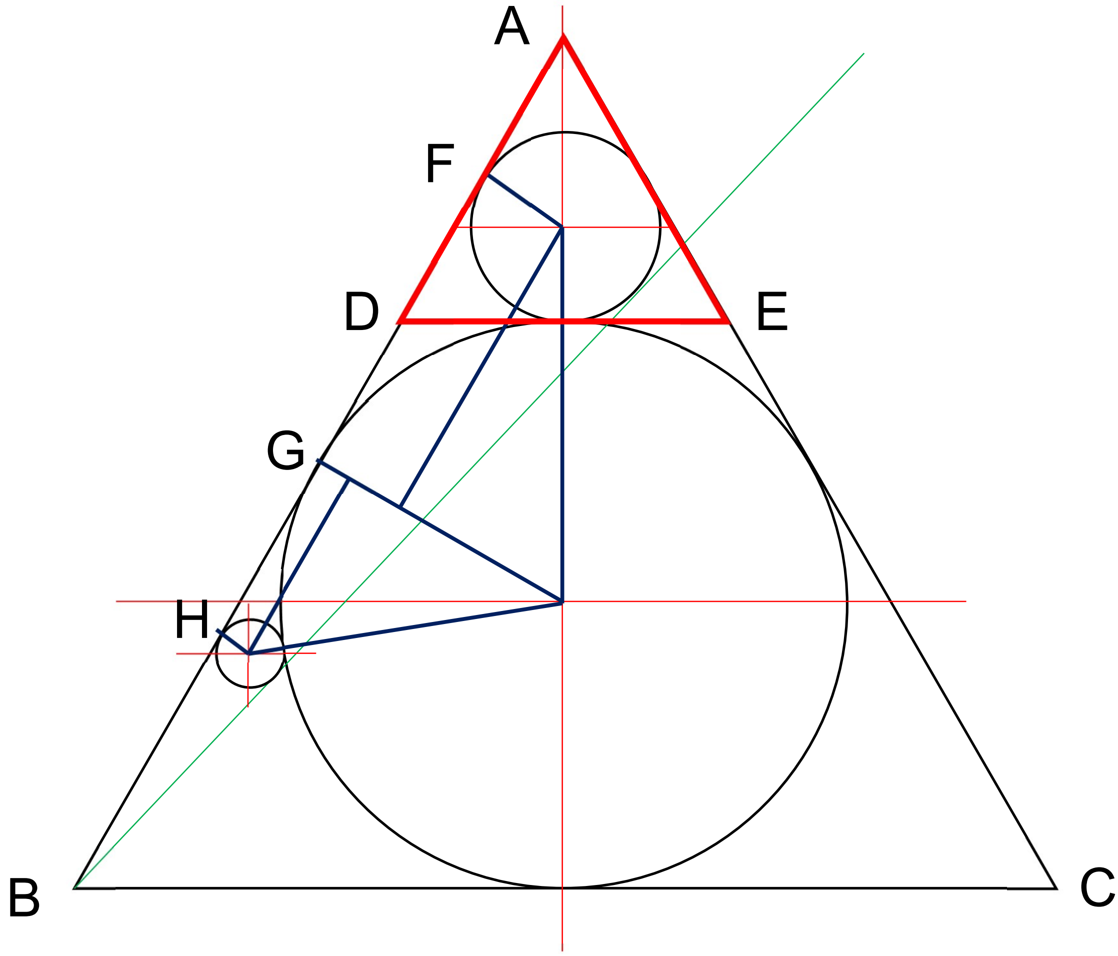


図１

中円と小円の大きさの関係を、正三角形ＡＢＣの辺ＡＢ上の線分の長さの関係に着目して整理する。

$$\frac{BF}{BH} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{\sqrt{3}\,r_3 + 2\sqrt{r_2 r_3}}{\sqrt{3}\,r_3 - 2\sqrt{r_1 r_3}}$$

$r_3 = 3r_2$を代入すると、

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{\sqrt{3}\cdot 3r_2 + 2\sqrt{3r_2^{\,2}}}{\sqrt{3}\cdot 3r_2 - 2\sqrt{3r_1 r_2}}$$

$$3r_2 - 2\sqrt{r_1 r_2} - 5r_1 = 0$$

$r_1 = \frac{9}{2}$を代入すると、

$$3r_2 - 2\sqrt{\frac{9}{2}r_2} - \frac{45}{2} = 0$$

$$\left(\sqrt{r_2} + \frac{3}{\sqrt{2}}\right)\left(3\sqrt{r_2} - \frac{15}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

$$\sqrt{r_2} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

$$r_2 = \frac{25}{2}$$

よって、中円の直径は２５寸である。