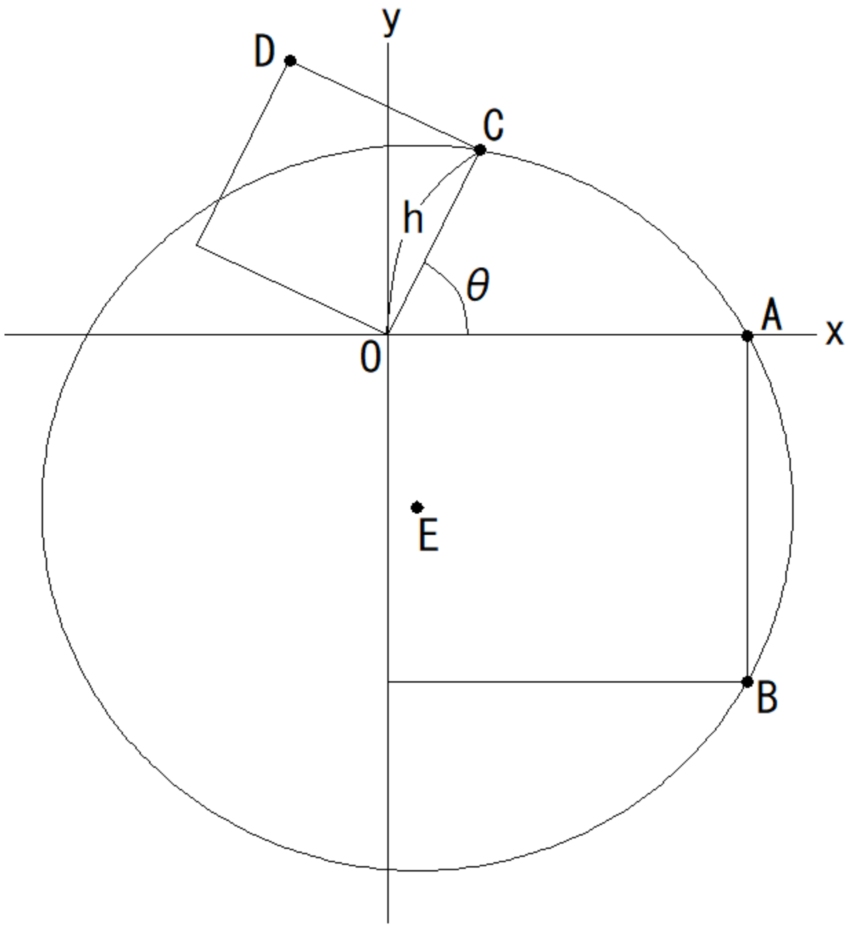
令和５年２月の問題-No.3　解法

最初に大円に接する大方・小方の位置関係について考える。以下の図のように、大方と小方の重なる頂点に原点Oを取り、大方の1辺の長さを1として正規化し、小方の1辺の長さを$h(0<h<1)$とする。
大方の頂点A,B、小方の頂点Cを通る円の中心をEとする。図のように大方と小方の辺のなす角θをとる$(0<\theta<\pi)$。題意を満たす大方・小方の関係が成り立つにはDが円周上にある必要がある。
Dが円上にあるためのθの条件を求める。



点A、B、C、D、E、及び円の半径rを以下に示す。

$A(1,0)$

$B(1,-1)$

$C(h*\cos\theta,h*\sin\theta)$

$D(\sqrt{2}*h*\cos(\theta+\pi/4),\sqrt{2}*h*\sin(\theta+\pi/4))=D(h*(\cos\theta-\sin\theta),h*(\sin\theta+\cos\theta))$

$E((h^2+h*\sin\theta-1)/(2*h*\cos\theta-2),-1/2)$

$r=\sqrt{((h^2-2*h*\cos\theta+1)*(h^2+2*h*\sin\theta-2*h*\cos\theta+2)/(2*(h*\cos\theta-1)^2))}$

線分DEの平方

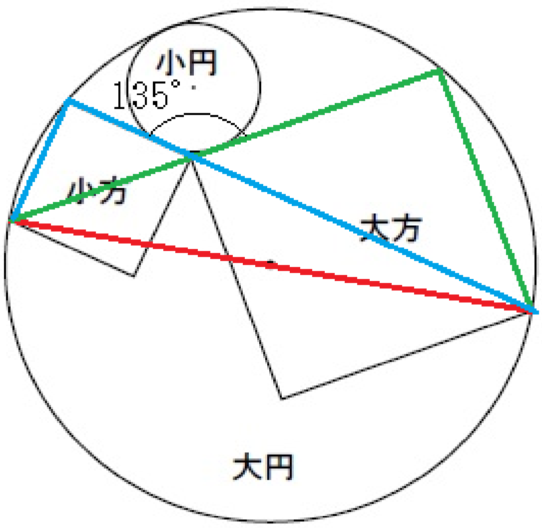
$DE^2=(h*(\cos\theta-\sin\theta)-(h^2+h*\sin\theta-1)/(2*h*\cos\theta-2))^2$
$\quad +(h*(\sin\theta+\cos\theta)+1/2)^2$

rの平方

$r^2=((h^2-2*h*\cos\theta+1)*(h^2+2*h*\sin\theta-2*h*\cos\theta+2)/(2*(h*\cos\theta-1)^2))$

を用いて、DE^2-r^2を整理すると、
$DE^2-r^2=h*(h^2-1)*(\sin\theta+\cos\theta)/(h*\cos\theta-1)$
となる。
題意の条件を満たすには、$DE^2-r^2=0$となる必要がある。
$0<h<1$なので$h*(h^2-1)$は0にならない。よって
$\sin\theta+\cos\theta=0$
となる必要がある。
三角関数をまとめて、$0<\theta<\pi$の条件のもとで式を満たすθを求めると
$\theta=3*\pi/4$
のみとなる。つまりθが135°の時のみ、円と大方・小方は題意の関係になる。

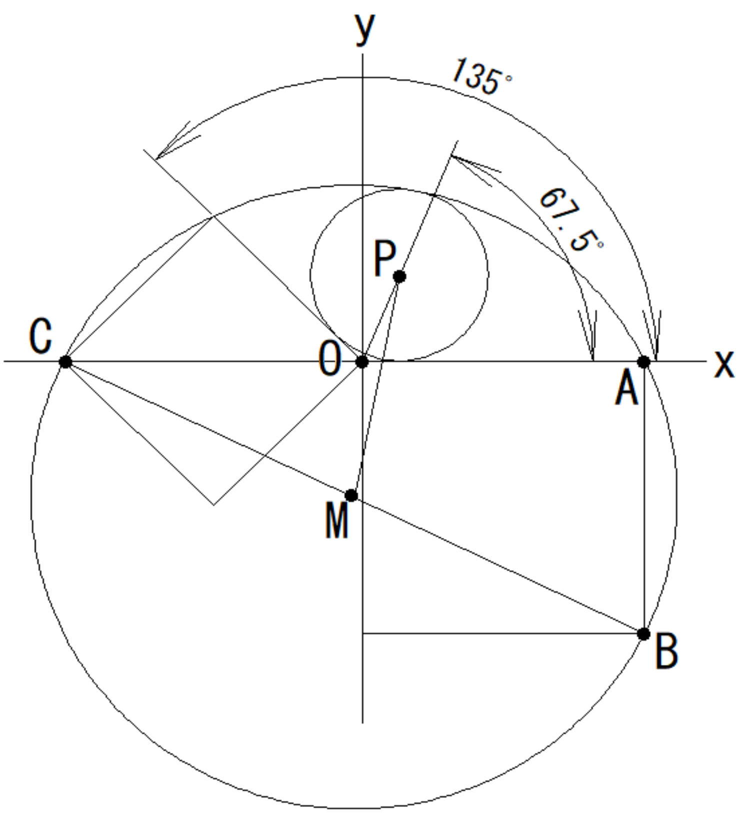
続いて問題の解法に移る。



小円が接している辺同士のなす角は前ページの結果より135° となる。よって、上図のように小円が接する大方の辺から線を延長した場合、線は小方の頂点に重なる(緑線)。小方についても同様(水色線)であり、大方・小方の頂点を図の赤い線分のように結ぶと、緑・水色の線で示した正方形の角(直角)が円周上にあるため、赤の線分は円周角定理の逆より大円の中心を通る。

以下、大円の半径をR、小円の半径をr、大方の1辺の長さをa、小方の1辺の長さをbとする。

以下の図のように座標を考え、大方、小方、大円、小円の満たす関係式を考察する。



各点の座標は表1のとおりとなる。

表1　各点の座標

記号	x	y	備考
A	a	0	
B	a	-a	
C	-√￣(2)b	0	
M	(a-√￣(2)b)/2	-a/2	線分BCの中点(大円の中心)
O	0	0	座標原点
P	r/(1+√￣(2))	r	小円の中心(tan(67.5°　)=1+√￣(2))

直角三角形ABCに三平方の定理を用いて

$$(2R)^2 = a^2 + \left(a + \sqrt{2}\ b\right)^2$$

が成立することから、大円の半径Rは

$$R = \frac{\sqrt{a^2 + \sqrt{2}\ a\,b + b^2}}{\sqrt{2}} \qquad (1)$$

となる。
一方で、大円の中心Mと小円の中心Pについて

$$(M\,P)^2 = (R - r)^2$$

となるので、以下の式を得る。

$$\left(\frac{1}{2}\left(a - \sqrt{2}\ b\right) - \frac{r}{1 + \sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{a}{2} - r\right)^2 = (R - r)^2 \qquad (2)$$

ここでa+bとrが既知となるので、a+b=Kとして、a=K-bと置き換え、
(1),(2)式を未知数R,bについて解くと、求める解として

$$R = \frac{K - \left(\sqrt{2} - 1\right) r}{\sqrt{2}}$$

$$b = \frac{\sqrt{2\sqrt{2}\ K^2 + 3\,K^2 - 12\sqrt{2}\ K\,r - 16\,K\,r + 2\sqrt{2}\ r^2 + 4\,r^2} + \sqrt{2}\ K + K}{2\left(1 + \sqrt{2}\right)}$$

を得る。

よって、小円の直径をd、小方と大方それぞれの1辺の長さの和(a+b)が
与えられた時の大円の直径Dは

$$\boxed{D = \frac{2(a+b) - \left(\sqrt{2} - 1\right)d}{\sqrt{2}}}$$

で求められる。

注意点として、a+b,dの値を代入してDが得られたとしても、作図不可能な場合がある。
例えば、a+b=110、d=60でD=137.989898・・・となるが、このような図形は作図不可能である。
また、Dが0以下の場合も作図不可能となる。
Dがどのような範囲であれば作図可能かを考える。
直角三角形ABCについて三平方の定理をもう一度書くと

$$D^2 = a^2 + \left(a + \sqrt{2}\ b\right)^2$$

ここで

$$a = K - b$$
$$b = x\,K,\ \ 0 < x < \frac{1}{2}$$

とすると

$$\left(\frac{D}{K}\right)^2 = 2\left(1 - \left(2 - \sqrt{2}\right)(1-x)\,x\right)$$

を得る。
右辺の取りうる値の範囲を考えると、結果的に
以下の不等式が成立する範囲の正のD,a+bでのみ作図可能となる。

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} < \left(\frac{D}{a+b}\right)^2 < 2$$

例で得られた結果は(D/(a+b))^2≒1.5737であり、上記の下限1+1/√2≒1.7071を下回っているため
作図不可能である。