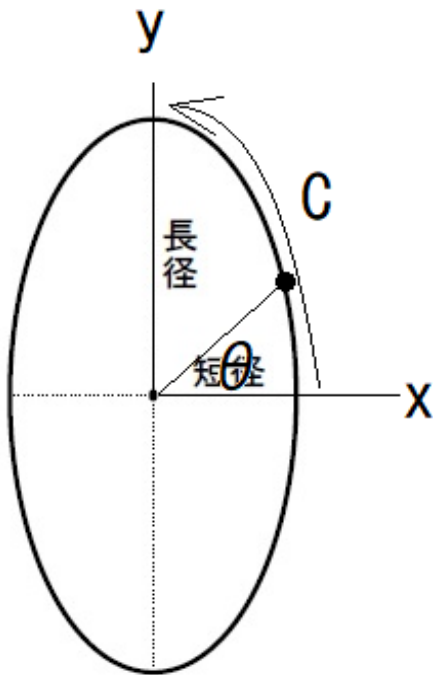


以下の図のように座標を考え、第一象限の楕円曲線の長さの4倍が求める周長となる。



$$x = \frac{1}{2} \cos(\theta) \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$y = \sin(\theta)$$

として、

楕円の周長 $L$ は以下のとおりである。

$$L = 4 \int_c ds$$

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta$$

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{4} + \cos^2 \theta} d\theta$$

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{3 \sin^2 \theta}{4}} d\theta$$

被積分関数をテイラー展開する。

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} - \frac{7x^5}{256} - \frac{21x^6}{1024} - \frac{33x^7}{2048} - \frac{429x^8}{32768} - \frac{715x^9}{65536} - \frac{2431x^{10}}{4199x^{11}} - \frac{128}{29393x^{12}} - \frac{256}{52003x^{13}} - \frac{2048}{185725x^{14}} - \frac{262144}{334305x^{15}} - \frac{524288}{9694845x^{16}} - \frac{4194304}{17678835x^{17}} - \frac{8388608}{64822395x^{18}} - \frac{33554432}{17179869184} + O(x^{19})$$

を用いる。今、

$$x = \frac{3}{4} \sin^2(\theta)$$

とすると、 $x$ の絶対値は1未満となり級数は収束する。

また、

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta d\theta$$

として、

$$I_0 = \frac{\pi}{2}$$

および積分公式

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$$

を用いて計算する。

計算結果は以下のようになる。円周率は出題の値を用いた。

テイラー展開の項の値はnが1以上で負であり、かつその絶対値は次項で  
 かならず3/4倍未満になることから、テイラー展開によるLの近似値の右に、  
 さらに項の値の3倍を加算したLの下限值を示した。以下の表より、楕円の周長は  
 黄色で示したL近似値未満かつL下限以上であるので、楕円の周長 $L \approx 4.844$ 寸を得る。

n	テイラー展開の係数	$(4/3)^n$	sinのべきm	lm	項の値	L近似値	L下限
0	1.00000000000000	1.0000000000	0	1.570795000	6.2831800000	6.2831800000	
1	-0.50000000000000	0.7500000000	2	0.785397500	-1.1780962500	5.1050837500	1.5707950000
2	-0.12500000000000	0.5625000000	4	0.589048125	-0.1656697852	4.9394139648	4.4424046094
3	-0.06250000000000	0.4218750000	6	0.490873438	-0.0517718079	4.8876421570	4.7323267334
4	-0.03906250000000	0.316406250	8	0.429514258	-0.0212345306	4.8664076264	4.8027040347
5	-0.02734375000000	0.237304688	10	0.386562832	-0.0100333157	4.8563743107	4.8262743636
6	-0.02050781250000	0.177978516	12	0.354349263	-0.0051734284	4.8512008823	4.8356805971
7	-0.01611328125000	0.133483887	14	0.329038601	-0.0028308683	4.8483700140	4.8398774089
8	-0.0130920410156	0.100112915	16	0.308473689	-0.0016172441	4.8467527698	4.8419010375
9	-0.0109100341797	0.075084686	18	0.291336261	-0.0009546233	4.8457981466	4.8429342768
10	-0.0092735290527	0.056313515	20	0.276769448	-0.0005781437	4.8452200029	4.8434855717
11	-0.0080089569092	0.042235136	22	0.264189019	-0.0003574577	4.8448625452	4.8437901722
12	-0.0070078372955	0.031676352	24	0.253181143	-0.0002248074	4.8446377378	4.8439633158
13	-0.0061992406845	0.023757264	26	0.243443407	-0.0001434145	4.8444943234	4.8440640800
14	-0.0055350363255	0.017817948	28	0.234748999	-0.0000926066	4.8444017168	4.8441238970
15	-0.0049815326929	0.013363461	30	0.226924033	-0.0000604258	4.8443412910	4.8441600136
16	-0.0045145140029	0.010022596	32	0.219832657	-0.0000397872	4.8443015038	4.8441821422
17	-0.0041161745321	0.007516947	34	0.213366990	-0.0000264072	4.8442750966	4.8441958750
18	-0.0037731599878	0.005637710	36	0.207440130	-0.0000176507	4.8442574459	4.8442044940