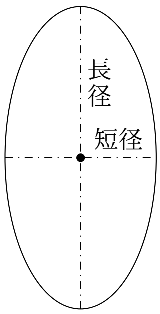
群和研・令和 5 年 2 月の問題 - No.4

問題

長径 2 寸，短径 1 寸の楕円形の周は何寸か．小数点以下 4 位を四捨五入し，小数点以下 3 位まで答えよ．円周率は，3.14159 を使用のこと．

『算法求積通考』　第 6 問　から作成

図



解法

1）楕円の媒介変数表示

長半径を a，短半径を b とすると，楕円の式は，

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$$

角度を θ とし，媒介変数表示すると，

$$x=a\cos\theta,\ y=b\sin\theta$$

θ で微分すると，

$$\frac{dx}{d\theta}=-a\sin\theta,\ \frac{dy}{d\theta}=b\cos\theta$$

2）楕円の周長の式

楕円の周長を L とし，L の 1/4（$\theta:0\to\pi/2$）を 4 倍するとして，

$$\begin{aligned}L&=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta\\&=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(-a\sin\theta)^2+(b\cos\theta)^2}\,d\theta\\&=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)\cos^2\theta}\,d\theta\\&=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\cos\theta\right)^2}\,d\theta\end{aligned}$$

3）二項定理

二項定理より，

$$\begin{aligned}(1+p)^m&=\sum_{n=0}^{\infty}{}_m\mathrm{C}_n\,p^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{m!}{n!\,(m-n)!}\,p^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(m-n+1)(m-n+2)\cdots(m-1)m}{n!}\,p^n\end{aligned}$$

$m=1/2$ とすると，

$$\begin{aligned}\sqrt{1+p}&=(1+p)^{\frac{1}{2}}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}-n+1\right)\left(\frac{1}{2}-n+2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}\right)}{n!}\,p^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot(3-2n)(5-2n)\cdots(-1)(1)}{n!}\,p^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot(2n-3)(2n-5)\cdots(1)}{2^n\cdot n!}\,p^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot(2n-3)!!}{(2n)!!}\,p^n\end{aligned}$$

4）楕円の周長の式

$$p=-\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\cos\theta\right)^2$$ とし，

$$\begin{aligned}L&=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot(2n-3)!!}{(2n)!!}(-1)^n\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\cos\theta\right)^{2n}d\theta\\&=4a\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{2n-1}\cdot(2n-3)!!}{(2n)!!}\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)^{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}\theta\,d\theta\end{aligned}$$

$$\frac{2n-1}{2n-1}\cdot\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}=\frac{(-1)}{1-2n}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$ 及び

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}\theta\,d\theta=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$ より，

$$L=2\pi a\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1-2n}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)^{2n}$$

n 項目の L を $L(n)$ とすると，

$$L(0)=2\pi a\cdot1\cdot\left(\frac{(-1)!!}{(0)!!}\right)^2\cdot1=2\pi a$$

$$\begin{aligned}L(1)&=2\pi a\cdot\left(\frac{1}{(-1)}\right)\left(\frac{(1)!!}{(2)!!}\right)^2\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)^2\\&=-\frac{\pi a}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)^2\end{aligned}$$

長半径 $a = 1$，短半径 $b = 1/2$，円周率 $\pi = 3.14159$ を代入し，$L(n)$ を逐次計算する．

$n = 13$ にて，L の小数点以下 4 桁が 4 以下となり，これを四捨五入し，L を得る．

$L \fallingdotseq 4.844$

n	$L(n)$	L
0	6.28318	6.28318
1	-1.17810	5.10508
2	-0.16567	4.93941
3	-0.05177	4.88764
4	-0.02123	4.86641
5	-0.01003	4.85637
6	-0.00517	4.85120
7	-0.00283	4.84837
8	-0.00162	4.84675
9	-0.00095	4.84580
10	-0.00058	4.84522
11	-0.00036	4.84486
12	-0.00022	4.84464
13	-0.00014	4.84449
14	-0.00009	4.84440
15	-0.00006	4.84434
16	-0.00004	4.84430
17	-0.00003	4.84428
18	-0.00002	4.84426
19	-0.00001	4.84425
20	-0.00001	4.84424
21	-0.00001	4.84423
22	0.00000	4.84423
23	0.00000	4.84423
24	0.00000	4.84422
25	0.00000	4.84422

答え

楕円形の周 = 4.844 寸