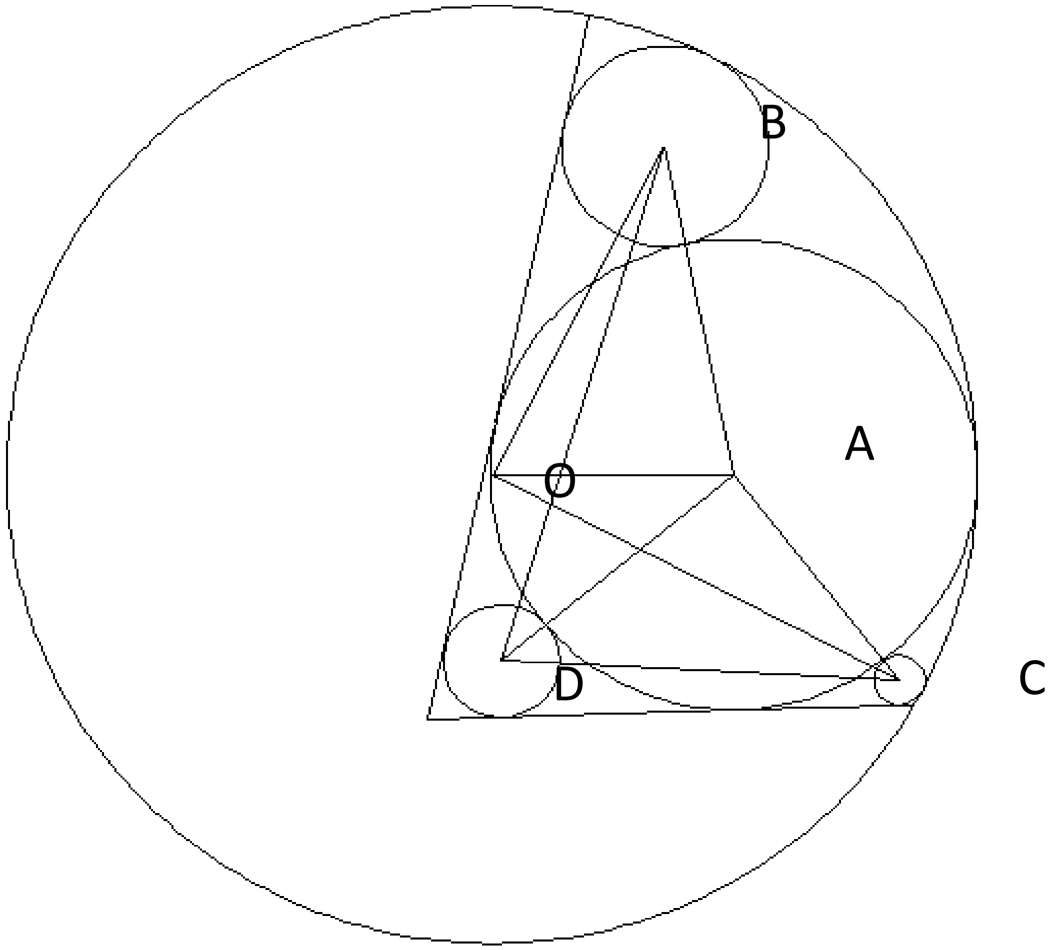
令和５年３月の問題-No.１ 解法

以下の図のように、外円中心をO、甲円中心をA、乙円中心をB、丙円中心をC、
丁円中心をDとして、丁円半径をr寸とする。



各円中心間の距離は以下の通りとなる。

AB=161/2

AC=125/2

AD=113/2+r

AO=56

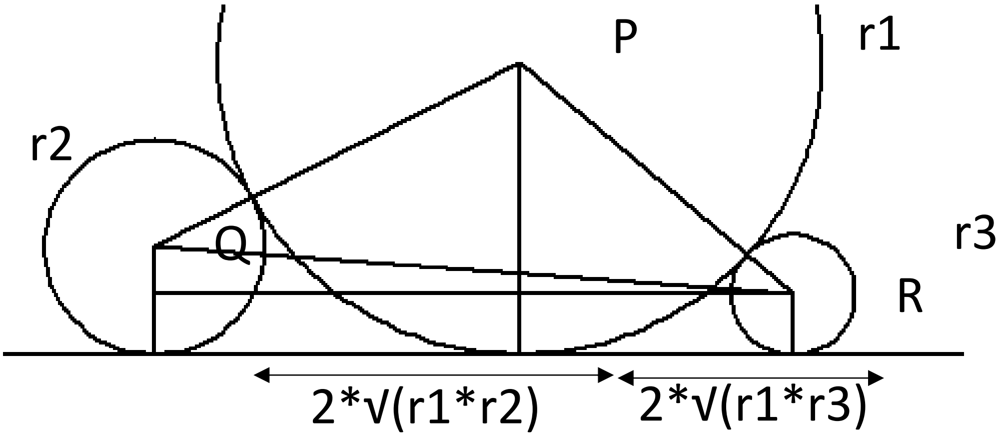
BD=sqrt((24-r)^2+4*(113/2)*(sqrt(24)+sqrt(r))^2)

BO=177/2

CD=sqrt((6-r)^2+4*(113/2)*(sqrt(6)+sqrt(r))^2)

CO=213/2

線分BD,CDは以下の図のように算出した。



PQ=r1+r2
PR=r1+r3
三平方の定理を用いてP,Q,Rの足の間の距離を求め
Q,Rの高さの差=|r2-r3|より
QR^2=(r2-r3)^2+(2*√(r1*r2)+2*√(r1*r3))^2
=(r2-r3)^2+4*r1*(√r2+√r3)^2

余弦定理より、それぞれの角の余弦を求め、正弦(正の値になる)も求める。

$$\cos(\angle BAD)=\frac{-130r-1808\sqrt{6}\sqrt{r}+7345}{322r+18193}$$

$$\sin(\angle BAD)=\frac{2\sqrt{226}\sqrt{96r^2+\sqrt{r}(29380\sqrt{6}-520\sqrt{6}r)-6623r+306456}}{161(2r+113)}$$

$$\cos(\angle CAD)=\frac{-202r-904\sqrt{6}\sqrt{r}+11413}{250r+14125}$$

$$\sin(\angle CAD)=\frac{2\sqrt{226}\sqrt{24r^2-404\sqrt{6}r^{3/2}+7489r+22826\sqrt{6}\sqrt{r}+76614}}{125(2r+113)}$$

$$\cos(\angle BAO)=\frac{223}{1127}$$

$$\sin(\angle BAO)=\frac{60\sqrt{339}}{1127}$$

$$\cos(\angle CAO)=-\frac{43}{70}$$

$$\sin(\angle CAO)=\frac{3\sqrt{339}}{70}$$

∠BAC=∠BAO+∠CAO=∠BAD+CADであることを利用してrを求める。
余弦定理より
cos(∠BAO)*cos(∠CAO)-sin(∠BAO)*sin(∠CAO)
=cos(∠BAD)*cos(∠CAD)-sin(∠BAD)*sin(∠CAD)
であるので、それぞれをrで表した式を代入して、rについて解けば
r=27/2、12769/4374を得るが、後者は∠BACの正弦が一致しないため、
適する解としてr=27/2を得る。
よって、丁円径は27寸である。