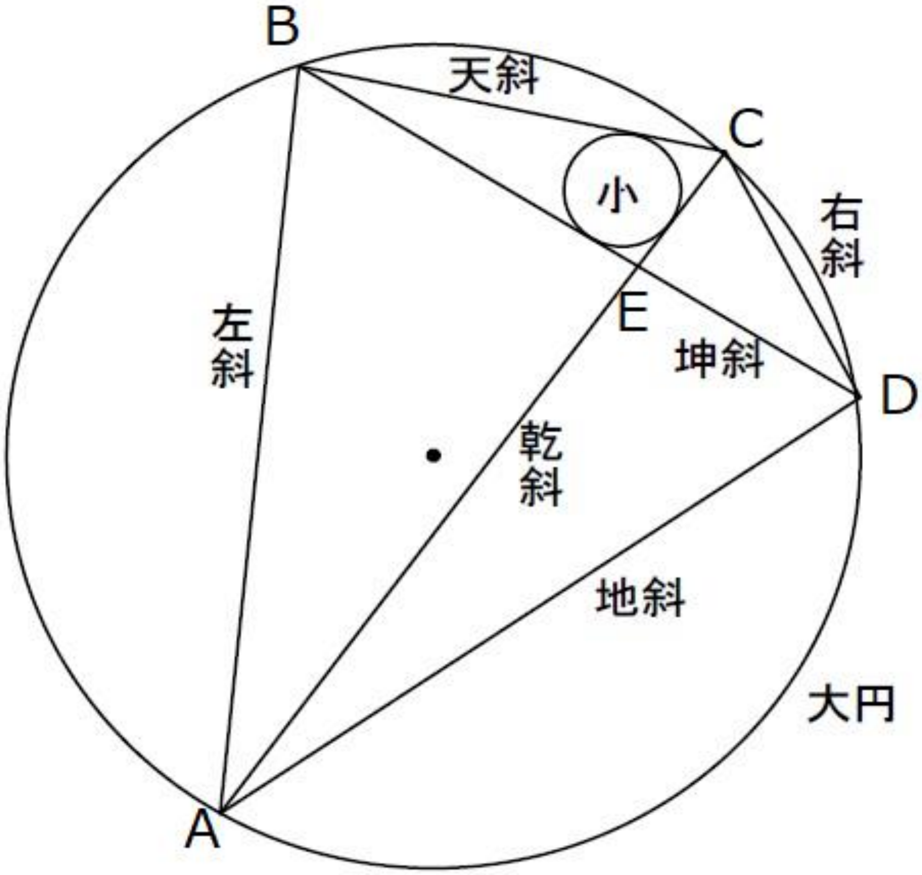
令和５年４月の問題-No.１ 解法

以下のように各頂点、交点に記号を付けて考える。



図のように、大円内に６本の斜線（天，地，乾，坤，左，右）を設け、天，乾，坤の３斜線に接する小円を容れる。

大円の直径と小円の直径の積が７８０で天斜３９寸，左斜６０寸，右斜２５寸のとき地斜は何寸か

「神壁算法（じんぺきさんぽう）」　　第１２問　から作成

AB=60, BC=39, CD=25となる。AD=x, CE=y、小円直径d1、大円直径D1とする。

円周角定理より△EBC∽△EAD、△EAB∽△EDCとなるので、
BE=12*y/5, DE=x*y/39, AE=4*x*y/65となる。

四角形ABCDは円に内接するので、トレミーの定理をもちいて
60*25+x*39=(y+4*x*y/65)*(12*y/5+x*y/39)
が成立する。これをyについて解くと、y>0であることを考えて
y=195*sqrt((13*x+500)/(20*x^2+2197*x+30420))
を得る。

△ABCの辺の長さから大円の直径を求める。
三角形の辺の長さa,b,cと三角形に外接する円の直径D'との関係式
D'=a*b*c/2/sqrt(s*(s-a)*(s-b)*(s-c))　, s=(a+b+c)/2
を用いて大円の直径を求める。a=60, b=39, c=4*x*y/65+yを代入してまとめると
D1=(600*x^2+65910*x+912600)
　　*sqrt((13*x+500)/((124-x)*(x+4)*(x+46)*(x+74)*(4*x+65)*(5*x+468)))
となる。

△BCEの辺の長さから小円の直径を求める。
三角形の辺の長さa,b,cと三角形に内接する円の直径d'との関係式
d'=2*sqrt(s*(s-a)*(s-b)*(s-c))/s　, s=(a+b+c)/2
を用いて小円の直径を求める。a=39, b=y, c=12*y/5を代入してまとめると
d1=78*sqrt(5*(x+4)*(x+74)*(17*sqrt(13*x+500)-sqrt((4*x+65)*(5*x+468))))/
　　sqrt((4*x+65)*(5*x+468)*(17*sqrt(13*x+500)+sqrt((4*x+65)*(5*x+468))))
となる。

D1*d1=780をxについて解くと、x=52を得る。
よって、**地斜=52寸**である。
なお、乾斜=63寸、坤斜=56寸、大円直径=65寸、小円直径=12寸であり、
乾斜と坤斜は直交する。