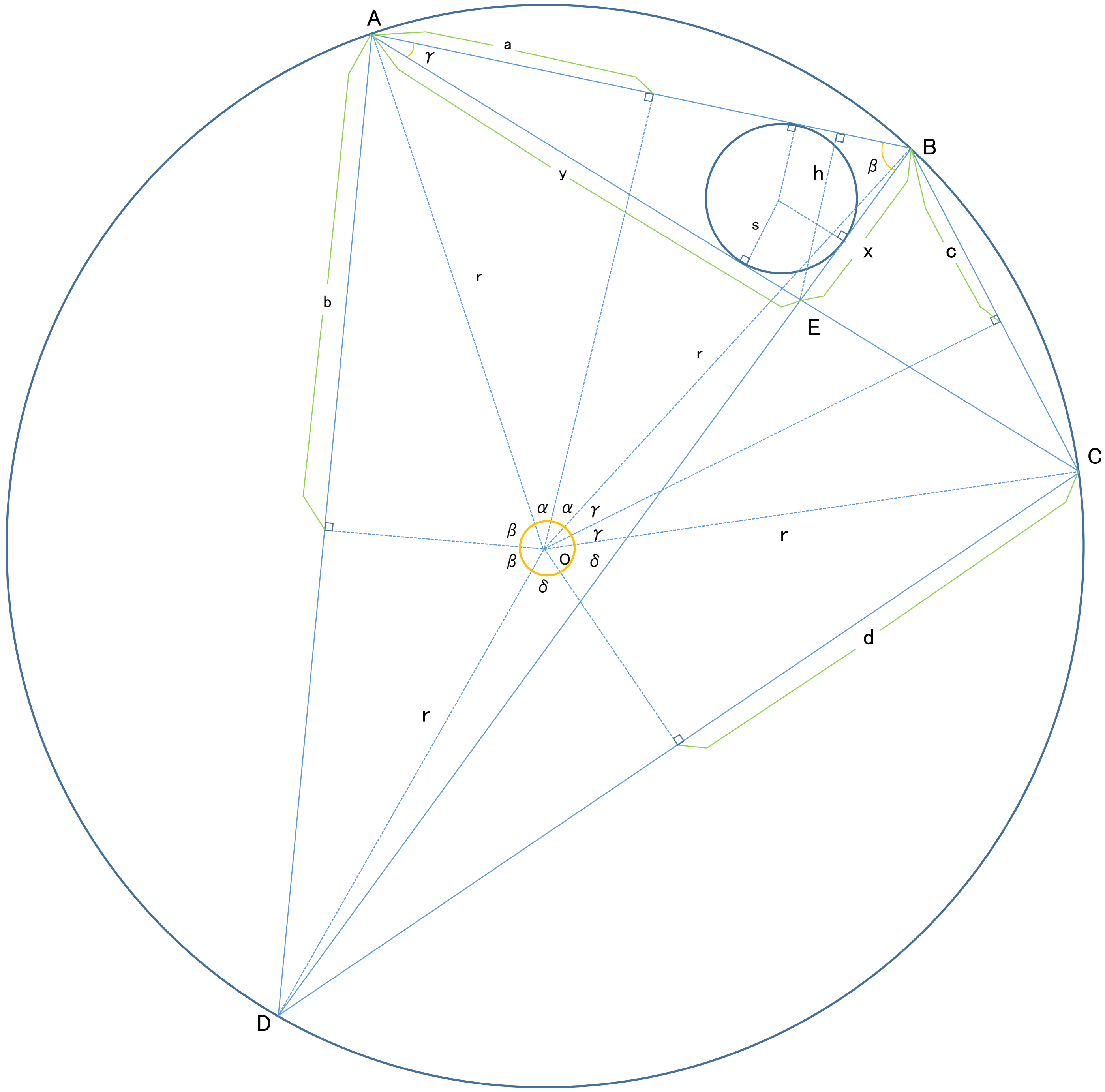
令和5年4月の問題ーNo.1



天斜、左斜、右斜、地斜をそれぞれ 2a, 2b, 2c, 2d とし、大円の半径を r, 小円の半径を s とする。
また、大円の中心周りの角度を上図のように α 、β 、γ 、δ を使って表す。

$$\angle BAC = \angle BOC \div 2 = \gamma \qquad \angle ABD = \angle AOD \div 2 = \beta$$

$$\left.\begin{aligned} &\sin(\alpha) = \frac{a}{r} \quad \sin(\beta) = \frac{b}{r} \quad \sin(\gamma) = \frac{c}{r} \quad \sin(\delta) = \frac{d}{r} \\ &\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{r} \quad \cos(\beta) = \frac{\sqrt{r^2 - b^2}}{r} \quad \cos(\gamma) = \frac{\sqrt{r^2 - c^2}}{r} \quad \cos(\delta) = \frac{\sqrt{r^2 - d^2}}{r} \end{aligned}\right\} \text{———①}$$

$$2(\alpha + \beta + \gamma + \delta) = 2\pi \qquad \beta + \gamma = \pi - (\alpha + \delta) \qquad \sin(\beta + \gamma) = \sin(\alpha + \delta) \quad \text{———②}$$

BE = x, AE = y とし、天斜を底辺とする△ABEの高さを h とする。

$$h = x \cdot \sin(\beta) = y \cdot \sin(\gamma) \qquad y = \frac{x \cdot \sin(\beta)}{\sin(\gamma)}$$

△ABEの面積＝ $ah = \frac{s}{2}(2a + x + y)$ $\qquad 2a \cdot x \cdot \sin(\beta) = s\left(2a + x + \frac{x \cdot \sin(\beta)}{\sin(\gamma)}\right)$

$$x = \frac{2as \cdot \sin(\gamma)}{2a \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\gamma) - s(\sin(\beta) + \sin(\gamma))} \qquad y = \frac{x \cdot \sin(\beta)}{\sin(\gamma)} = \frac{2as \cdot \sin(\beta)}{2a \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\gamma) - s(\sin(\beta) + \sin(\gamma))}$$

$$2a = x\cdot\cos(\beta) + y\cdot\cos(\gamma) = \frac{2as\cdot(\sin(\gamma)\cdot\cos(\beta)+\sin(\beta)\cdot\cos(\gamma))}{2a\cdot\sin(\beta)\cdot\sin(\gamma) - s(\sin(\beta)+\sin(\gamma))}$$

$s(\sin(\beta)\cdot\cos(\gamma)+\cos(\beta)\cdot\sin(\gamma)) = 2a\cdot\sin(\beta)\cdot\sin(\gamma) - s(\sin(\beta)+\sin(\gamma))$ ―――③

式①を代入すると、 $s\left(b\cdot\sqrt{r^2-c^2} + c\cdot\sqrt{r^2-b^2}\right) = 2abc - (b+c)(rs)$

$(b+c)(rs) = B$ とおくと、

$$s^2\left[b^2(r^2-c^2) + c^2(r^2-b^2) + 2bc\cdot\sqrt{(r^2-b^2)(r^2-c^2)}\right] = (2abc-B)^2$$

$$2bcs^2\cdot\sqrt{(r^2-b^2)(r^2-c^2)} = (2abc-B)^2 - s^2\left[(b^2+c^2)r^2 - 2b^2c^2\right] = 2bc\left[(rs)^2 + bcs^2\right] - 4abc(B-abc)$$

$B - abc = A$ とおくと、

$$s^2\cdot\sqrt{(r^2-b^2)(r^2-c^2)} = \left[(rs)^2 + bcs^2\right] - 2aA$$

$$s^4\cdot(r^2-b^2)\cdot(r^2-c^2) = 4a^2A^2 - 4\cdot aA\left[(rs)^2+bcs^2\right] + \left[(rs)^2+bcs^2\right]^2 = 4a^2A^2 - 4aAs^2(r^2+bc) + s^4(r^2+bc)^2$$

$$4a^2A^2 - 4aAs^2(r^2+bc) + s^4\left[(r^2+bc)^2 - r^4 + (b^2+c^2)r^2 - b^2c^2\right] = 0$$

$$4a^2A^2 - 4aAs^2(r^2+bc) + s^2(b+c)^2(rs)^2 = 0$$

$$4aA\left[aA-(rs)^2\right] - 4aAbcs^2 + s^2B^2 = 0$$

$$4aA\left[aA-(rs)^2\right] + s^2(abc-A)^2 = 0$$

$$s^2 = \frac{4aA\cdot\left[(rs)^2 - aA\right]}{(abc-A)^2}$$ ―――④

式③より、 $s\cdot\sin(\beta+\gamma) = 2a\cdot\sin(\beta)\cdot\sin(\gamma) - s(\sin(\beta)+\sin(\gamma))$

式②を代入すると、 $s\cdot\sin(\alpha+\delta) = 2a\cdot\sin(\beta)\cdot\sin(\gamma) - s(\sin(\beta)+\sin(\gamma))$

$s(\sin(\alpha)\cdot\cos(\delta)+\cos(\alpha)\cdot\sin(\delta)) = 2a\cdot\sin(\beta)\cdot\sin(\gamma) - s(\sin(\beta)+\sin(\gamma))$

式①を代入すると、 $s\left(a\cdot\sqrt{r^2-d^2} + d\cdot\sqrt{r^2-a^2}\right) = 2abc - B = abc - A$

$$s^2\left[a^2(r^2-d^2) + d^2(r^2-a^2) + 2ad\cdot\sqrt{(r^2-a^2)(r^2-d^2)}\right] = (abc-A)^2$$

$$2ads^2\cdot\sqrt{(r^2-a^2)(r^2-d^2)} = (abc-A)^2 + s^2(2a^2-r^2)d^2 - a^2(rs)^2$$

$$4a^2d^2s^4\cdot\left[(r^2-a^2)\cdot r^2 - (r^2-a^2)\cdot d^2\right] = (abc-A)^4 + 2\cdot(abc-A)^2\cdot s^2\cdot\left[(2a^2-r^2)\cdot d^2 - a^2r^2\right] + s^4\left[(2a^2-r^2)\cdot d^2 - a^2r^2\right]^2$$

$(rs)^4d^4 - 2s^2\left[a^2r^4s^2 - (abc-A)^2(2a^2-r^2)\right]d^2 + \left[(abc-A)^2 - a^2(rs)^2\right]^2 = 0$ $d^2 > 0$ より、

$$d^2 = \frac{s^2\cdot\left[a^2r^4s^2 - (abc-A)^2\cdot(2a^2-r^2)\right] + 2as^2\cdot(abc-A)\cdot\sqrt{(a^2-r^2)\cdot\left[(abc-A)^2 - r^4s^2\right]}}{(rs)^4}$$

$$d^2 = \frac{a^2\cdot\left[(rs)^4 - s^2\cdot(abc-A)^2\right] + (abc-A)^2\cdot\left[(rs)^2 - a^2s^2\right] + 2\cdot a(abc-A)\cdot\sqrt{\left[(rs)^2-a^2s^2\right]\cdot\left[(rs)^4 - s^2\cdot(abc-A)^2\right]}}{(rs)^4}$$

$$d^2 = \frac{\left[a\cdot\sqrt{(rs)^4 - s^2(abc-A)^2} + (abc-A)\cdot\sqrt{(rs)^2-a^2s^2}\right]^2}{(rs)^4}$$

$$d = \frac{a\cdot\sqrt{(rs)^4 - s^2\cdot(abc-A)^2} + (abc-A)\cdot\sqrt{(rs)^2-a^2s^2}}{(rs)^2}$$

式④を代入すると、

$$d = \frac{a\cdot\sqrt{(rs)^4 - 4aA\cdot\left[(rs)^2-aA\right]} + \sqrt{(abc-A)^2\cdot(rs)^2 - 4a^3A\left[(rs)^2-aA\right]}}{(rs)^2}$$

$$d = \frac{a\cdot\left[(rs)^2-2aA\right] + \sqrt{\left[(abc-A)^2 - 4a^3A\right](rs)^2 + 4a^4A^2}}{(rs)^2}$$ 但し、 $A = (b+c)(rs) - abc$

$(2r)(2s) = 780$ $rs = 195$ $a = \frac{39}{2}$ $b = \frac{60}{2}$ $c = \frac{25}{2}$ を代入すると、

$A = 39\cdot 25$ $d = 26$ $2d = 52$

∴地斜 ＝ 52寸