

群馬県和算研究会 令和5年4月の問題-No. 2の解答

解答

令和5年4月の問題-No.2

図のように、大円内に等脚台形と小円を容れる。
台形の上底（上頭）が36寸、台形の下底（下頭）が300寸、台形の対角線（内斜）280寸のとき小円の直径は何寸か
「神算算法（じんべきさんぼう）」 第15問を少し変えて作成

問題を図1に示す台形 $ABCD$ について、大円の半径を r 、小円の直径を d として、次の手順で解く。

- 直角三角形 ECA から、台形の高さ $h = AE$ を求める
- 直角三角形 GAO と直角三角形 FOD のそれぞれの斜辺の長さが r であることから、大円の中心 O と台形の上頭 AB との位置関係を求め、 r を算定する。
- 直角三角形 HOA の辺 HO の長さを求め、 d を算定する

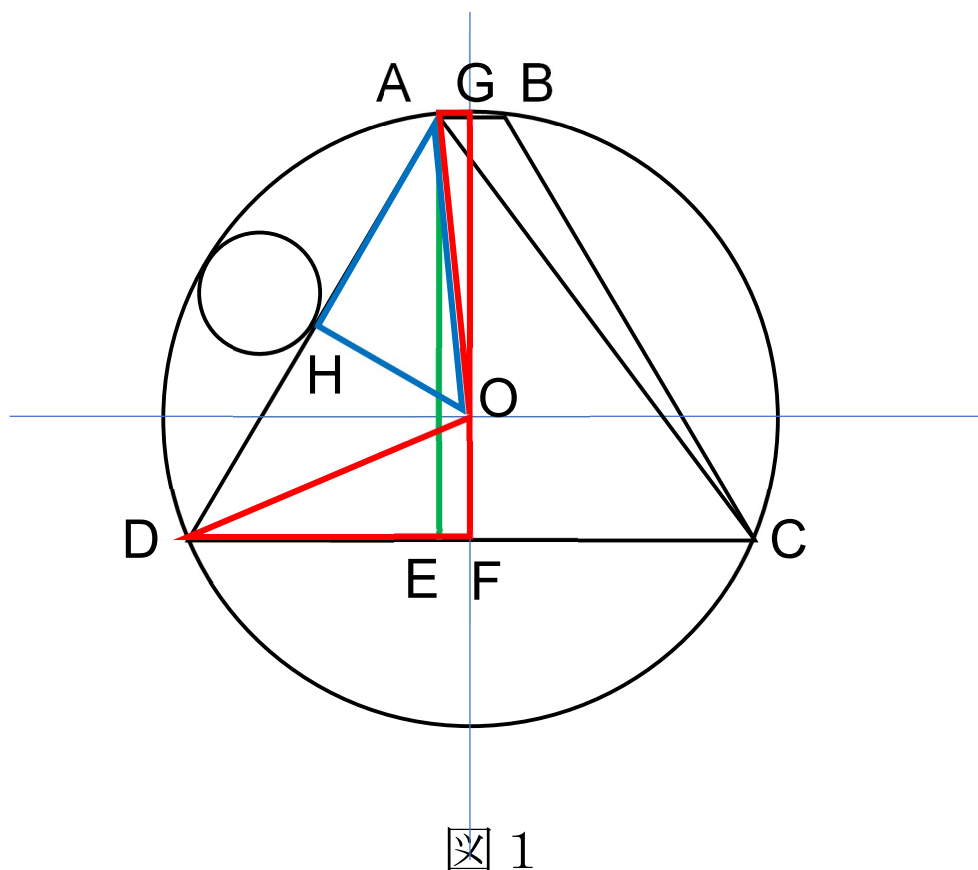


図 1

点Aから線分DCに垂線を引いた交点をEとし、直角三角形ECAから、台形の高さ $h = AE$ を求める。

$$EC = \frac{(DC - AB)}{2} + AB = \frac{(300 - 36)}{2} + 36 = 168$$

$$AE = \sqrt{CA^2 - EC^2} = \sqrt{280^2 - 168^2} = 224$$

直角三角形GAOと直角三角形FODのそれぞれの斜辺AOとODの長さは r であり、辺 $GA = 18$ 、 $OG = x$ 、 $DF = 150$ 、 $FO = 224 - x$ を用いて、 r を三平方の定理をもちいて表すと、次式となる。

$$r^2 = GA^2 + OG^2 = 18^2 + x^2$$

$$r^2 = DF^2 + FO^2 = 150^2 + (224 - x)^2$$

この2つの式から、 x を求めると

$$x = 161.5$$

であり、

$$r = 162.5 \text{ となる。}$$

次に、直角三角形HOAの辺HOの長さを求める。

辺AHの長さは、直角三角形EADの斜辺ADの長さの1/2であり、

EA=224、DE=132から、

$$AD = \sqrt{EA^2 + DE^2} = \sqrt{224^2 + 132^2} = 260$$

$$AH = 130$$

となる。

直角三角形HOAにおいて、

$$HO = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \sqrt{162.5^2 - 130^2} = 97.5$$

また、

$$d = r - HO = 162.5 - 97.5 = 65$$

よって、小円の直径は65寸である。