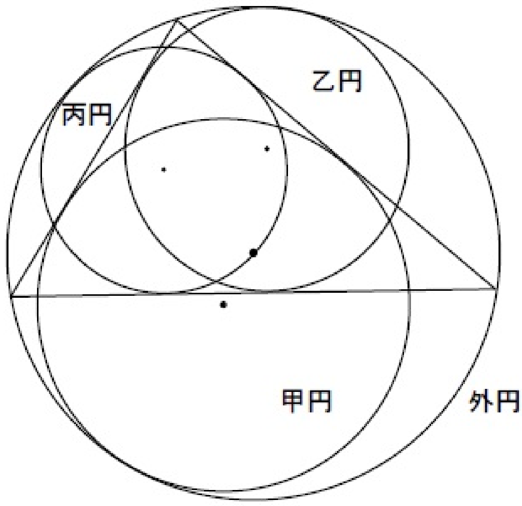
令和５年５月の問題-No. １

問題

出題図を図１に示す。



図のように、外円の中に３本の斜線と３個の円（甲円，乙円，丙円）があります。３個の円は、それぞれ外円と２本の斜線に接しています。（３本の斜線は、外円に内接する三角形の３辺となっています。）

甲円の直径が３０寸，乙円の直径が２０寸，丙円の直径が１５寸のとき、外円の直径は何寸でしょうか？

「神壁算法（じんぺきさんぽう）」　第２７問　から作成

図１　出題図

解答

図 2 のように、辺の長さがそれぞれ a, b, c の三角形 ABC に外接する半径 R の円と、三角形の辺 AB, AC に内接し、かつ外接円に内接する半径 r の円を考える。外接円の半径 R と内接円の半径 r は、三角形の 3 辺の長さ a, b, c から、以下の式によって求められる。

$$R = \frac{abc}{\sqrt{2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - (a^4 + b^4 + c^4)}} \tag{1}$$

$$r = \frac{2bc\sqrt{2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - (a^4 + b^4 + c^4)}}{(a+b+c)^2(-a+b+c)} \tag{2}$$

式 (1) は三角形の辺の長さと外接円の関係式として知られているものであり、式 (2) に関しては導出過程を後述する。

甲乙丙円の半径 $r_a = 15, r_b = 10, r_c = \frac{15}{2}$ にあわせて出題図の三角形の辺の長さを適当に a, b, c として設定すると、式 (2) を用いて以下の式を得る。

$$r_a = \frac{2bc\sqrt{2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - (a^4 + b^4 + c^4)}}{(a+b+c)^2(-a+b+c)} = 15 \tag{3}$$

$$r_b = \frac{2ca\sqrt{2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - (a^4 + b^4 + c^4)}}{(a+b+c)^2(a-b+c)} = 10 \tag{4}$$

$$r_c = \frac{2ab\sqrt{2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - (a^4 + b^4 + c^4)}}{(a+b+c)^2(a+b-c)} = \frac{15}{2} \tag{5}$$

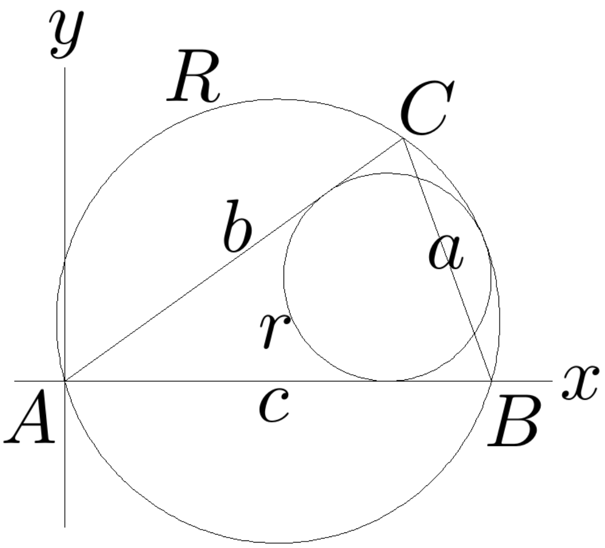


図 2　三角形の 2 辺と外接円に内接する円と三角形の外接円

r_a, r_b, r_c の比を考えることによって対称性のある項を打ち消し、以下の式を得る。

$$\frac{r_a}{r_b} = \frac{b(a-b+c)}{a(-a+b+c)} = \frac{3}{2} \tag{6}$$
$$\frac{r_b}{r_c} = \frac{c(a+b-c)}{b(a-b+c)} = \frac{4}{3} \tag{7}$$
$$\frac{r_c}{r_a} = \frac{a(-a+b+c)}{c(a+b-c)} = \frac{1}{2} \tag{8}$$

これらを式変形して、以下の式を得る。

$$2b(a-b+c) = 3a(-a+b+c) \tag{9}$$
$$3c(a+b-c) = 4b(a-b+c) \tag{10}$$
$$2a(-a+b+c) = c(a+b-c) \tag{11}$$

a, b, c が正の数であることに注意して、これらの式の意味のある解として、以下の不定解を得る。

$$a \neq 0 \tag{12}$$
$$b = \frac{9a}{10} \tag{13}$$
$$c = \frac{2a}{5} \tag{14}$$

上記の関係式を用いて、r_a, r_b, r_c が題意に一致するように a を定める。式 (3) に b, c を a で表した形で代入すると、以下の式を得る。

$$\frac{36}{23\sqrt{23}}a = 15 \tag{15}$$

これを解いて $a = \frac{115\sqrt{23}}{12}$ を得れば、以下のように b, c 等他の寸法が決定される。

$$a = \frac{115\sqrt{23}}{12} \tag{16}$$
$$b = \frac{69\sqrt{23}}{8} \tag{17}$$
$$c = \frac{23\sqrt{23}}{6} \tag{18}$$
$$r_a = 15 \tag{19}$$
$$r_b = 10 \tag{20}$$
$$r_c = \frac{15}{2} \tag{21}$$
$$R = 23 \tag{22}$$

r_a, r_b, r_c は出題の甲乙丙円半径となることから、R は出題の外円の半径である。以上より、出題の外円の直径は 46 寸となる。作図結果を図 3 に示す。

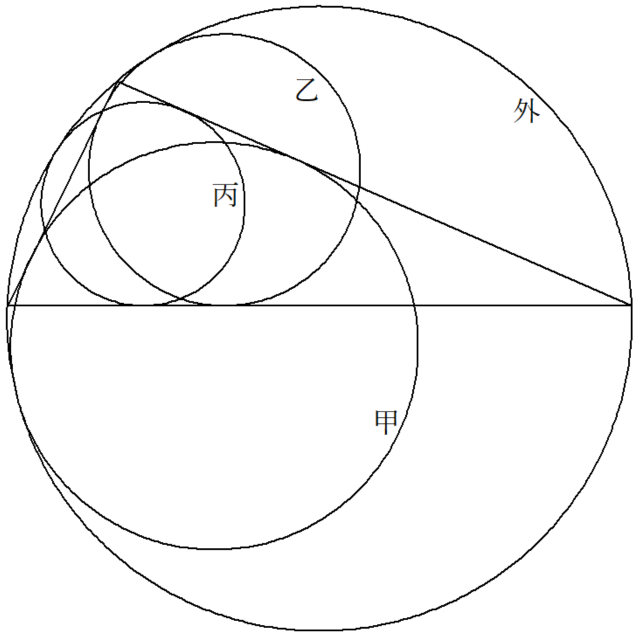


図 3　作図結果

補足：式の導出

式 (2) の導出について、図 2 を参考に説明する。a, b, c は正の数で、三角形を構成する条件を満たすとする。

三角形 ABC について、頂点 A を原点、頂点 B を x 軸上正の位置に置く。頂点 C は y 軸正の側に置くこととする。頂点 A, B の座標は、$A(0,0), B(c,0)$ である。$\angle A$ の正弦及び余弦は、余弦定理より以下のようになる。

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \tag{23}$$

$$\sin A = \frac{\sqrt{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4)}}{2bc} \tag{24}$$

よって頂点 C の座標は、

$$C\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}, \frac{\sqrt{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4)}}{2c}\right) \tag{25}$$

となる。

三角形 ABC に外接する円の方程式を以下の式で表す。

$$x^2+y^2+k_x x+k_y y+k_c=0 \tag{26}$$

A, B, C は外接円上にあるので、外接円の方程式 (26) を満たす。外接円の方程式に A, B, C の座標を代入した場合に式が成り立つので、k_x, k_y, k_c について連立方程式を解いて以下の結果を得る。

$$k_x = -c \tag{27}$$

$$k_y = -\frac{c(c^2-b^2-a^2)\sqrt{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4)}}{a^4+b^4+c^4-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)} \tag{28}$$

$$k_c = 0 \tag{29}$$

よって、外接円の中心 O の座標は、

$$O\left(-\frac{k_x}{2}, -\frac{k_y}{2}\right) \tag{30}$$

となる。なお、$AO = \frac{1}{2}\sqrt{{k_x}^2+{k_y}^2}$ が外接円の半径 R となり、これは式 (1) と一致する。

辺 AB, AC に接し外接円に内接する円 (内接円) の半径 r を求める。内接円の中心 P は、$\angle CAB$ の二等分線上にあるので、A から B に向かう単位ベクトル $(1,0)$ と、A から C に向かう単位ベクトル $(\cos A, \sin A)$ との和のベクトルの向きにある。係数 t を用いて、P は、

$$P\left(t(1+\cos A), t\sin A\right) \tag{31}$$

となる。また、P の y 軸成分が内接円の半径 r であるので、以下の関係式を得る。

$$r = t\sin A \tag{32}$$

外接円の中心 O と内接円の中心 P との距離 OP は、外接円の半径 R から内接円の半径 r を引いた値に等しいことから、それぞれの二乗が等しいことを利用して以下の式が成立する t を求める。

$$\left(t(\cos A+1)+\frac{k_x}{2}\right)^2+\left(t\sin A+\frac{k_y}{2}\right)^2=(R-t\sin A)^2 \tag{33}$$

これを解いて

$$t=\frac{4b^2c^2}{(a+b+c)^2(-a+b+c)} \tag{34}$$

$$t=0 \tag{35}$$

となる。$t=0$ は解として不適なので除いて、最終的に内接円の半径 r は、

$$r=t\sin A \tag{36}$$

$$=\frac{2bc\sqrt{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4)}}{(a+b+c)^2(-a+b+c)} \tag{37}$$

となる。