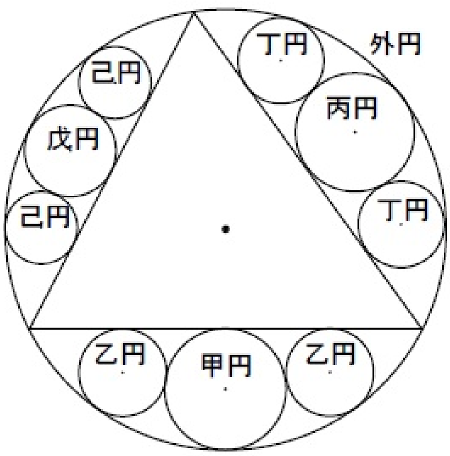
令和５年５月の問題-No.2

問題

出題図を図１に示す。



図のように、外円内に三角形と九つの円が接して入っています。
乙円の直径が３寸、丁円の直径が２寸、己円の直径が１寸のとき、外円の直径は何寸でしょうか？

「神壁算法（じんぺきさんぽう）」　第３９問から作成

図１　出題図

解答

図 2 に示すような、半径 R の大円に内接する 3 つの円 (半径 r_1, r_2) を考える。内接する円は大円の弦 (線分)DE に図のように接するものとし、$r_1 < r_2, r_2 < \frac{R}{2}$ であるとする。図の対称性より線分 DE は x 軸と平行である。図における円の半径 R, r_1 と線分 DE の長さとの関係式を求める。

三角形 ABC と三角形 AOC について、三平方の定理を用いて AC^2 が等しいことから、以下の式が成立する。

$$OA^2 - OC^2 = AB^2 - BC^2 \tag{1}$$

各線分の長さは、円の内外接の関係から、

$$OA = R - r_1 \tag{2}$$
$$OB = R - r_2 \tag{3}$$
$$OC = R - 2r_2 + r_1 \tag{4}$$
$$AB = r_1 + r_2 \tag{5}$$
$$BC = r_2 - r_1 \tag{6}$$

であるので、これらを式 (1) に代入して r_2 について解けば

$$r_2 = \frac{R \pm \sqrt{R^2 - 4r_1 R}}{2} \tag{7}$$

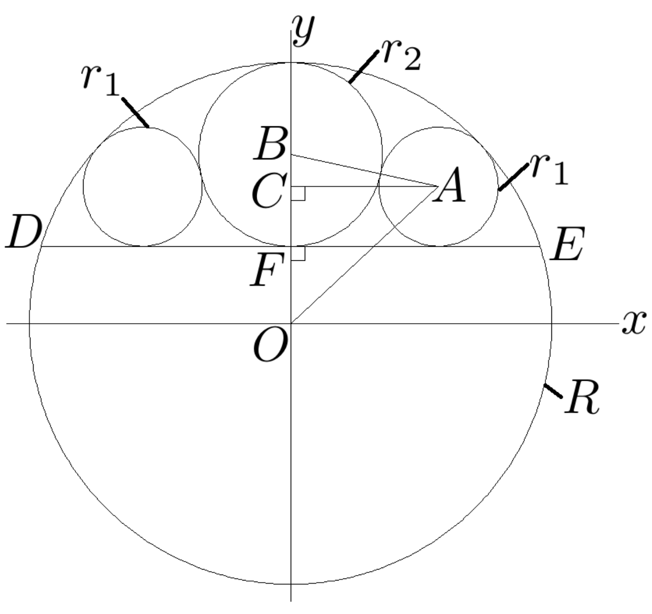


図 2　大円に内接する円と弦

を得る。$\pm$ 符号のうち $+$ は r_2 の半径が $\frac{R}{2}$ を超えてしまうため不適である。よって、

$$r_2 = \frac{R - \sqrt{R^2 - 4r_1R}}{2} \tag{8}$$

となる。これより、線分 DE の長さは

$$\begin{aligned} DE &= 2\sqrt{OE^2 - OF^2} &(9)\\ &= 2\sqrt{R^2 - (R - 2r_2)^2} &(10)\\ &= 4\sqrt{r_1R} &(11) \end{aligned}$$

となる。

乙丁己円の接する三角形の辺の長さをそれぞれ a, b, c とする。乙丁己円の半径は、それぞれ $\frac{3}{2}, \frac{2}{2} = 1, \frac{1}{2}$ なので、外円の半径を R とすれば、式 (11) を用いて、a, b, c は

$$\begin{aligned} a &= 4\sqrt{\frac{3}{2}R} &(12)\\ b &= 4\sqrt{R} &(13)\\ c &= 4\sqrt{\frac{1}{2}R} &(14) \end{aligned}$$

となる。この a, b, c において、辺の長さが a, b, c である三角形の外接円の半径 R の公式

$$R = \frac{abc}{\sqrt{2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - (a^4 + b^4 + c^4)}} \tag{15}$$

が成立するように R を定めると、

$$R = \sqrt{6R} \tag{16}$$

を解いて

$$R = 6 \tag{17}$$

を得る。よって、求める外円の径は 12 寸である。また、甲円径 6 寸、丙円径 $2(3 - \sqrt{3})$ 寸、戊円径 $2(3 - \sqrt{6})$ 寸、三角形の辺の長さは、$a = 12, b = 4\sqrt{6}, c = 4\sqrt{3}$ 寸となる。三角形は直角三角形である。作図結果を図 3 に示す。

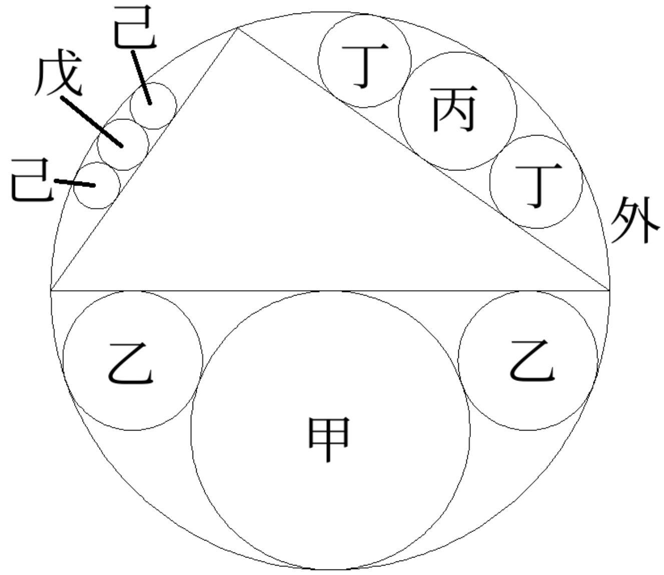


図 3　作図結果