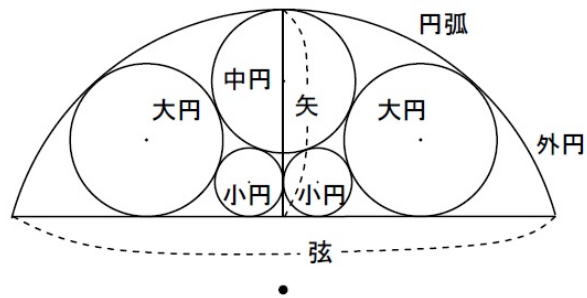


令和5年6月の問題-No.1

問題

出題図を図1に示す。



図のように、円弧と弦でできた弓形内^{きゅうけい}に5つの円を接するように容れます。

弦の長さが8寸で、小円の直径が1寸円の時、矢の長さは何寸でしょうか？

「神壁算法（じんぺきさんぼう）」 第43問 から作成

図1 出題図

解答

小円の半径を $\frac{1}{2}$ 、大円の半径を r_2 、中円の半径を r_3 、円弧の半径を R とする。図の対称性より、図 2 のように、右半分を考える。弦と矢の交点に座標原点 O をとり、小円、大円、中円、円弧の中心をそれぞれ A, B, C, D とする。座標値として未知数 a_2, b_4 を用い、円と円弧の半径を用いると、各円の中心点の座標は図 2 に示すようになる。円及び円弧が内外接している条件と、円弧の中心と弦の端部との距離が円弧の半径であることから、以下の式が成立する。

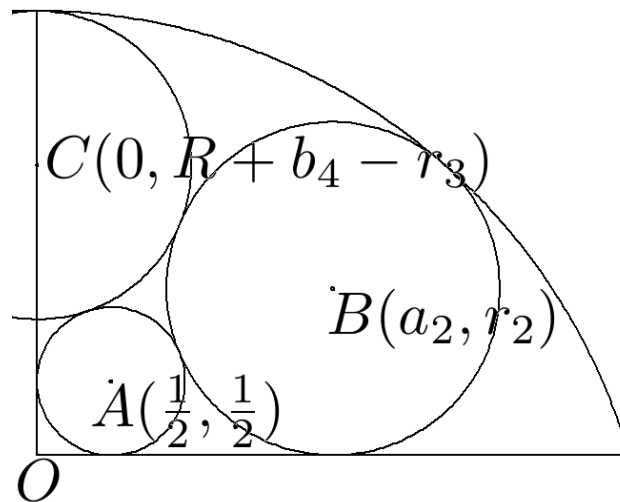
$$AB^2 = \left(\frac{1}{2} - a_2\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - r_2\right)^2 = \left(\frac{1}{2} + r_2\right)^2 \quad (1)$$

$$AC^2 = \left(\frac{1}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - R - b_4 + r_3\right)^2 = \left(\frac{1}{2} + r_3\right)^2 \quad (2)$$

$$BC^2 = (a_2 - 0)^2 + (r_2 - R - b_4 + r_3)^2 = (r_2 + r_3)^2 \quad (3)$$

$$BD^2 = (a_2 - 0)^2 + (r_2 - b_4)^2 = (R - r_2)^2 \quad (4)$$

$$R^2 = 4^2 + b_4^2 \quad (5)$$



$$D(0, b_4)$$

図 2 円中心の座標

未知数 r_2, r_3, R, a_2, b_4 の 5 つに対して式が 5 つあるため、連立方程式を解くことで円・円弧の半径と中心点座標が求められる。式を解くと、以下の結果を得る。

$$r_2 = \frac{9}{8} \quad (6)$$

$$r_3 = \frac{25}{24} \quad (7)$$

$$R = \frac{25}{6} \quad (8)$$

$$a_2 = 2 \quad (9)$$

$$b_4 = -\frac{7}{6} \quad (10)$$

矢の長さは C の y 座標値に r_3 を足したものに等しいので、矢の長さ $= R + b_4 = \frac{25}{6} - \frac{7}{6} = 3$ 寸となる。