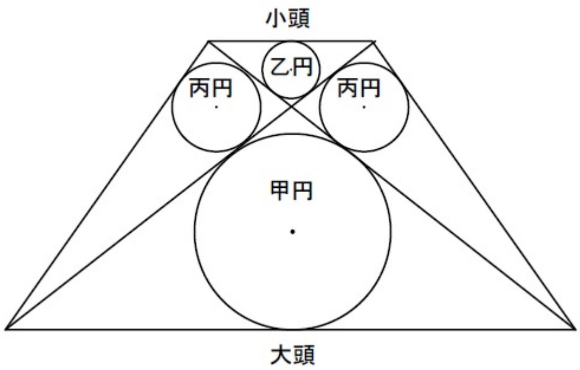
令和５年６月の問題-No.2

問題

出題図を図１に示す。



図のように、等脚台形を対角線で４つに区分し、おのおのの部分に内接する４個の円を容れます。

甲円の直径が１００寸, 乙円の直径が２８寸, 丙円の直径が４５寸のとき、大頭（等脚台形の底辺）の長さは何寸でしょうか？

「神壁算法（じんぺきさんぽう）」　第４８問　から作成

図１　出題図

解答

等脚台形の対称性より、図 2 のように図形の右半分を考える。甲乙丙円半径をそれぞれ r_1, r_2, r_3 とすれば、$r_1 = 50, r_2 = 14, r_3 = \frac{45}{2} = 22.5$ である。

各円は三角形の内接円であるので、円に外接する三角形の辺の長さが与えられると、円の半径が定まる。これを利用して甲乙丙円の半径が出題の値になるように各辺の長さを決定する。

辺 AB, BC の長さを変数として考える。この 2 辺の長さより、辺 AC の長さが三平方の定理を用いて決まる。すると、$\triangle ABC \backsim \triangle DEC$ であるので、辺 CD, CE, DE の長さは、甲乙円半径の比より、$\triangle ABC$ の対応する各辺の長さの $\frac{25}{7}$ 倍になる。また、三平方の定理より $BE^2 = (DE - AB)^2 + (AC + CD)^2$ であるので、BE の長さも定まる。

辺の長さがそれぞれ a, b, c の三角形に内接する円の半径 r は、以下の式で求められる。

$$r = \frac{S}{s} \tag{1}$$

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \tag{2}$$

$$s = \frac{a+b+c}{2} \tag{3}$$

三角形の内接円の半径を、三角形の辺の長さ a, b, c の関数として $r(a, b, c)$ と書くことにすると、$r_1 = r(CE, CE, 2DE), r_2 = r(BC, BC, 2AB), r_3 = r(BC, BE, CE)$ である。

$AB = 42, BC = \frac{105}{2} = 52.5$ とすると、各辺の長さと各円の半径は次のようになる。

$AB = 42, BC = 52.5, AC = 31.5, CD = 112.5, CE = 187.5, DE = 150,$

$r_1 = 50, r_2 = 14, r_3 = 22.5$

この結果より、大頭の長さは $2DE = 300$ 寸となる。

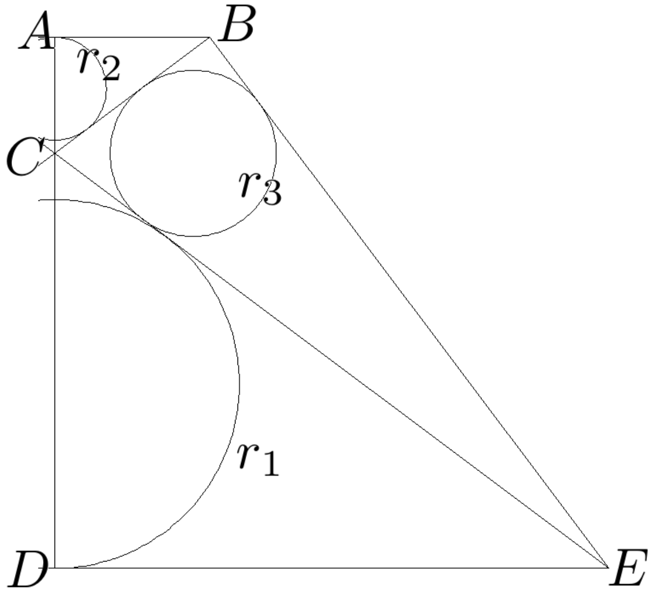


図 2