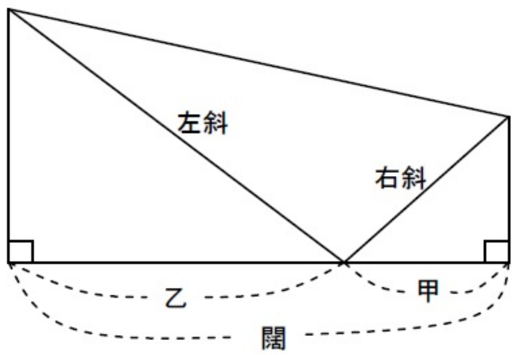
令和５年７月の問題-No.2

問題

出題図を図１に示す。



図のように、台形内に左斜と右斜の２本の直線分を設けます。

左斜の長さが１５寸，右斜の長さが５寸，闊の長さが１２寸のとき、甲の長さと乙の長さの積が最大になる甲の長さおよび乙の長さは、それぞれ何寸でしょうか

（注：台形の上底と下底は、闊と直交します。）

「神壁算法（じんぺきさんぽう）」　第５３問　から作成

図１　出題図

解答

問題文のとおりに考えると、甲の長さを x とすれば、甲乙の積 $x(12-x)$ が最大になる x を求めることになるが、$0 < x <$ 右斜 $= 5$ の範囲で最大値は取らない ($x \to 5$ で甲乙の積は大きくなる) ので、原題を確認したところ、台形の面積が最大になる甲乙の長さを求めることになっているようであった。そのため、原題の問題を解く。

甲の長さを x とすると、台形の左側の下底 $= \sqrt{15^2-(12-x)^2}$、右側の上底 $= \sqrt{5^2-x^2}$ であるので、台形の面積 S と、その x に関する微分 S' は以下のとおりとなる。

$$S = \frac{\sqrt{5^2-x^2}+\sqrt{15^2-(12-x)^2}}{2}12 \tag{1}$$

$$S' = 6\left(\frac{-x}{\sqrt{5^2-x^2}}+\frac{12-x}{\sqrt{15^2-(12-x)^2}}\right) \tag{2}$$

x の範囲は $0 < x < 5$ である。面積が最大の時、$S' = 0$ となるので、(2) 式を用いて $S' = 0$ を x について解くと、$x = 3$ を得る。よって、甲の長さ 3 寸、乙の長さ $= 12 - 3 = 9$ 寸となる。