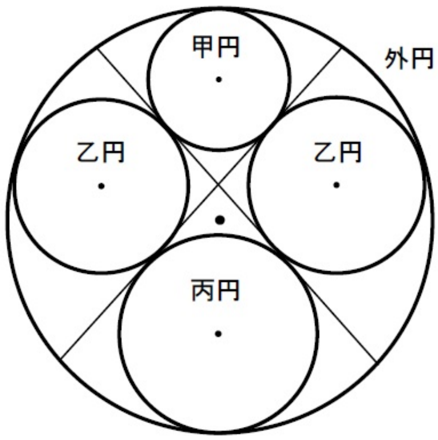
令和５年８月の問題-No.1

問題

出題図を図１に示す。



図のように、外円内を２本の斜で区分し、甲円１個，乙円２個，丙円１個を容れます。

外円の直径が６０寸，甲円の直径が２０寸，丙円の直径が２８寸のとき、乙円の直径は何寸でしょうか？

「神壁算法（じんぺきさんぽう）」　第５４問　から作成

図１　出題図

解答

図 2 のように、外円の中心を原点 O に取る座標系を考える。外甲丙円の半径がそれぞれ 30,10,14 なので、図の対称性も含めて考えると、甲円の中心 $A(0,20)$、丙円の中心 $B(0,-16)$ となる。$\triangle AEC \backsim \triangle BFC$ であることから $AC:BC = AE:BF = 10:14 = 5:7$ となることと、$AC+BC=36$ より、AC=15,BC=21 を得る。よって 2 本の斜の交点 C の座標は $C(0,5)$ となる。

2 斜に乙円が接していることから線分 CD は 2 斜の角の二等分線となっており、図のような角 θ,α を用いれば、$\angle ACD, \angle BCD$ は共に $\theta+\alpha=90°$ となり、線分 CD は x 軸に平行である。

$\triangle AEC$ を参考にして、$\sin\theta=\frac{10}{15}$、$\sin\alpha=\sin(90° - \theta)=\frac{\sqrt{5}}{3}$ を得るので、乙円の半径を r とすれば、$\sin\alpha=\frac{r}{CD}$ より $CD=\frac{3}{\sqrt{5}}r$ となる。

$OC=5$、外円に内接する乙円の関係から $OD=30-r$、$CD=\frac{3}{\sqrt{5}}r$ より、$\triangle OCD$ に対して三平方の定理を適用すると以下の式を得る。

$$(30-r)^2 = 5^2 + (\frac{3}{\sqrt{5}}r)^2 \tag{1}$$

これを解いて $r=\frac{25}{2}$ を得るので、乙円の直径は 25 寸となる。

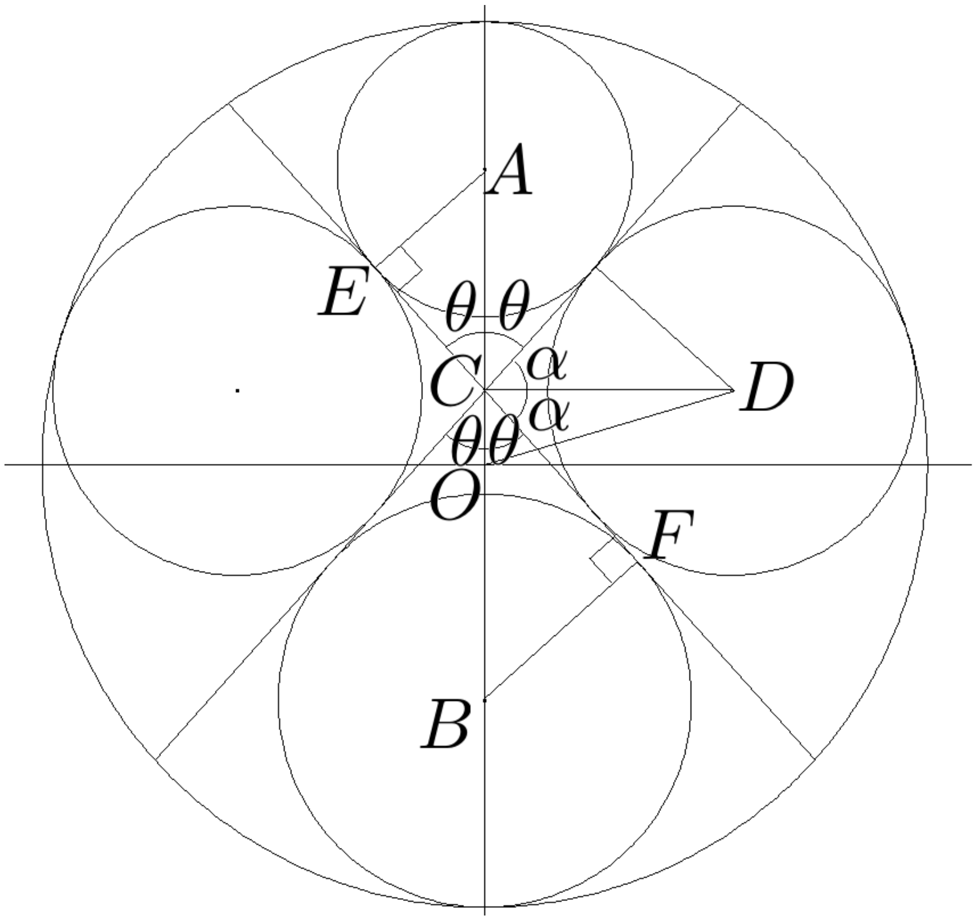


図 2