令和５年８月の問題-No.2

問題

出題図を図１に示す。

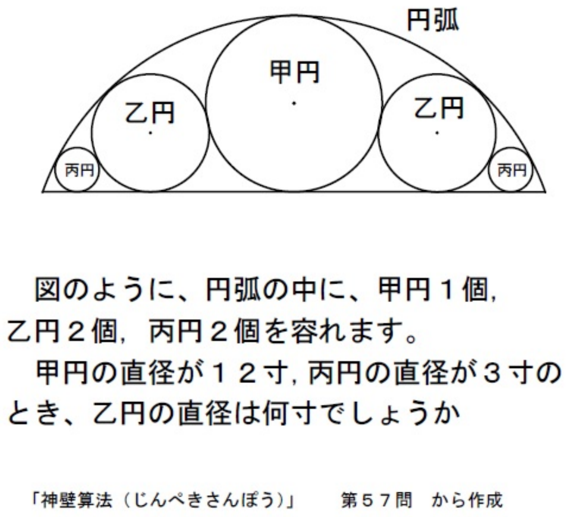

図１　出題図

解答

図 2 のように円弧の中心を原点に取る座標系を考え、図の対称性より、甲円とその右側の乙円、丙円を考える。

円弧の半径を R とすると、甲円の中心 $A(0, R-6)$ となる。円弧の弦は直線 $y = R-12$ 上にあるため、乙丙円の半径をそれぞれ r_1, r_2、中心の x 座標をそれぞれ x_1, x_2 とすると、それぞれの円の中心の y 座標は図 2 のようになる。

乙円が円弧に内接し、甲円と外接するので、以下の式が成立する。

$$x_1^2 + (R-12+r_1)^2 = (R-r_1)^2 \tag{1}$$
$$(x_1-0)^2 + (R-12+r_1-(R-6))^2 = (6+r_1)^2 \tag{2}$$

これらの式を x_1, r_1 について解けば、$x_1 > 0$ に注意して $x_1 = 12\sqrt{1-\frac{6}{R}}, r_1 = 6-\frac{36}{R}$ を得る。

同様にして、丙円が円弧に内接し、乙円と外接するので、以下の式が成立する。

$$x_2^2 + (R-12+r_2)^2 = (R-r_2)^2 \tag{3}$$
$$(x_2-x_1)^2 + (R-12+r_2-(R-12+r_1))^2 = (r_1+r_2)^2 \tag{4}$$

x_1, r_1 は既知であるので、これらの式を x_2, r_2 について解けば、$x_2 = \frac{24R\sqrt{1-\frac{6}{R}}}{R+6}, r_2 = \frac{6R^2-72R+216}{R^2+12R+36}$ を得る。

丙円直径が 3 であるので、半径が $\frac{3}{2}$ であることから、円弧の半径 R を求める。$\frac{6R^2-72R+216}{R^2+12R+36} = \frac{3}{2}$ を解いて $R = 18$ を得る。よって乙円半径 $r_1 = 6-\frac{36}{18} = 4$ となるので、乙円径は 8 寸となる。

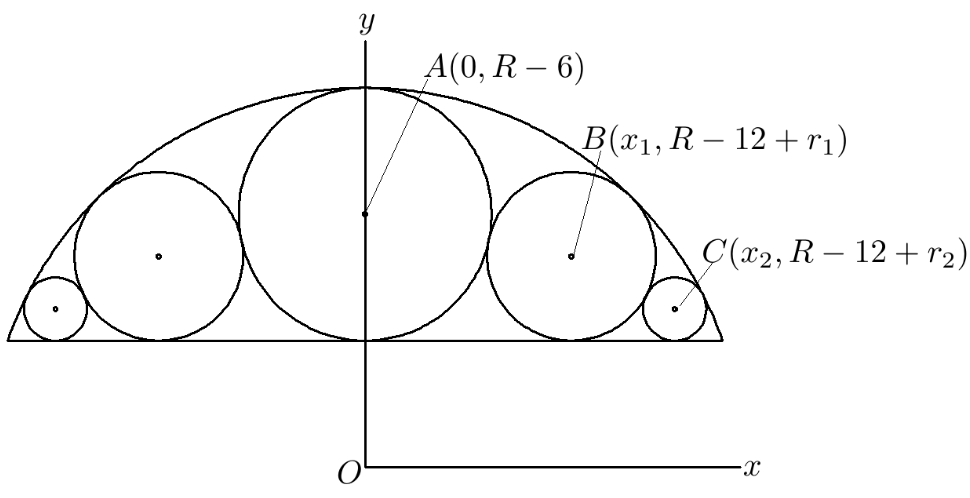

図 2