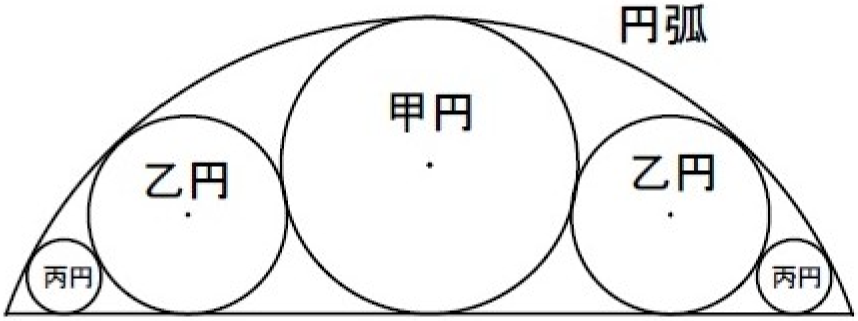
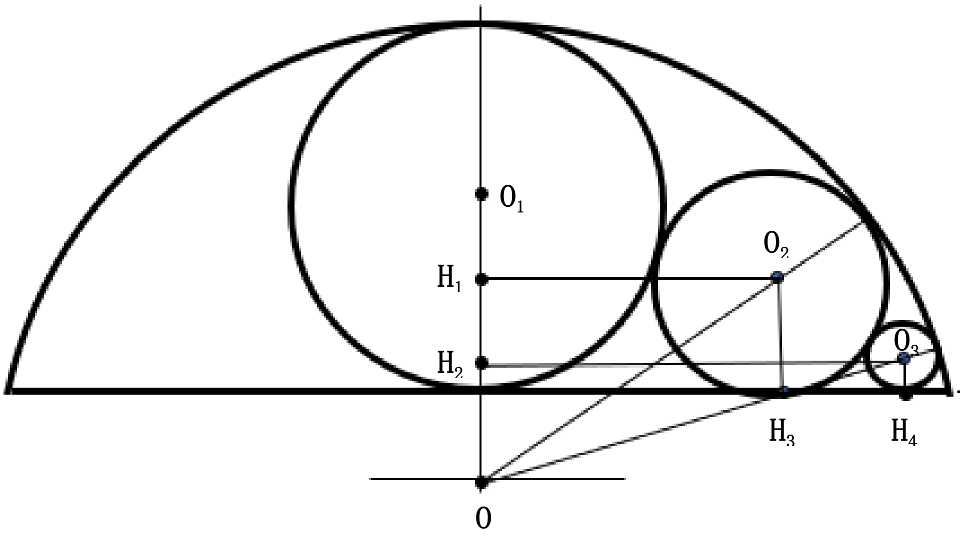
8月問題-No. 2



図のように、円弧の中に、甲円１個,
乙円２個, 丙円２個を容れます。
甲円の直径が１２寸, 丙円の直径が３寸の
とき、乙円の直径は何寸でしょうか

「神壁算法（じんぺきさんぽう）」　第５７問　から作成



（解答）

外円の半径をR, 甲円、乙円、丙円の半径を各々a, b, c とする。

ステップ１（三角形と各辺の長さの関係を数式に表す）

△$H_{1}00_{2}$に対して３平方の定理より、

$$(2\sqrt{ab})^2 + (R - 2*a + b)^2 = (R - b)^2 \qquad \cdots ①$$

を得る。次に△$H_{2}00_{3}$対して同様に、

$$(2\sqrt{ab} + 2\sqrt{bc})^2 + (R - 2*a + c)^2 = (R - c)^2 \qquad \cdots ②$$

を得る。

ステップ２（外円の半径をａとｂで表す）

① 式より、

$$4*a*b + \{(R + b) - 2*a\}^2 = R^2 - 2*a*b + b^2$$

Rについて解くと

$$R = a^2/(a - b) \qquad \cdots ③$$

を得る。

ステップ３（乙円の半径を求める）

③ 式を②式に代入し、乙円の半径ｂを解く。

$$4*b*(\sqrt{a} + \sqrt{c})^2 + R^2 + 2*R*(c - 2*a) + (c - 2*a)^2 = R^2 - 2*R*c + c^2$$

$$4*b*\left(\sqrt{a}\ +\ \sqrt{c}\right)^2 - a^2*(a-c)/(a-b)\ + a*(a-c) = 0$$

$$(\ a*b\ -\ b^2)*\left(\sqrt{a}+\sqrt{c}\right)^2 + (\ a\ -\ c\ )*(\ -a*b\ ) = 0$$

ここで計算を簡略化するため、$\left(\sqrt{a}\ +\ \sqrt{c}\right)^2 = K^2$ と置く。すると、

$$a*b*K^2 - b^2*K^2 - a^2*b + a*b*c = 0$$
$$K^2*b^2 - (a*K^2 - a^2 + a*c)*b = 0$$
$$K^2*b = a*K^2 - a^2 + a*c$$

∴

$$b = (K^2 - a + c)*a/K^2 \qquad \cdots ④$$

ステップ４（数値計算）

当該問題題意より、甲円半径 a= 12 寸/2 =6 寸、丙円半径 c = 3 寸/2 =1.5 寸であるから、

$$K^2 = \left(\sqrt{a}\ +\ \sqrt{c}\right)^2 = \left(\sqrt{6}\ +\ \sqrt{1.5}\right)^2 = 13.5$$

$$b = (13.5 - 6 + 1.5)*6\ /13.5 = 4$$

となる。

従って、乙円の直径は$2*b\ =\ 8$寸となる。

（　答　乙円径　8 寸　）