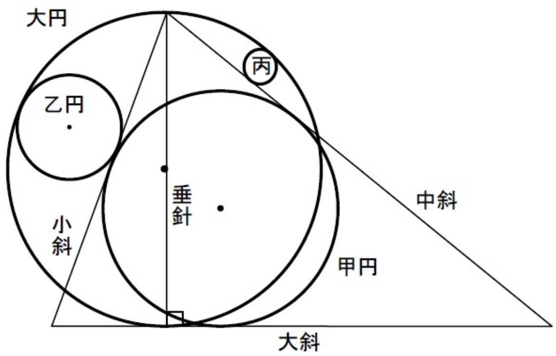
令和５年９月の問題-No.1

問題

出題図を図１に示す。



図のように、三角形の内外に４つの円を書きます。
小斜と中斜がつくる頂点から、大斜へ垂線を下し、
これを仮に垂針と呼びます。
大円は垂針を直径とします。甲円は三角形の内接円で、
乙円は小斜に接し、大円に内接します。丙円は中斜に
接し、大円に内接します。

大円の直径が３６寸，乙円の直径が１２寸，丙円の
直径が４寸のとき、甲円の直径は何寸でしょうか？

「神壁算法（じんぺきさんぽう）」　第６０問　から作成

図１　出題図

解答

図 2 のように、三角形の頂点、垂針と辺の交点、大円中心と乙丙円中心とを結ぶ線分と三角形の辺の交点に記号を付けて考える。

$\angle AFO = \angle AEO = \angle ADB = \angle ADC = 90°$,$OF = 18 - 12 = 6, OE = 18 - 4 = 14, OA = OD = 18$ である。$\triangle AOF, AOE$ に三平方の定理を用いて $AF = 12\sqrt{2}, AE = 8\sqrt{2}$ を得る。$\triangle AOF \backsim \triangle ABD, \triangle AOE \backsim \triangle ACD$ であるので $BD = 9\sqrt{2}, AB = 27\sqrt{2}, CD = \frac{63\sqrt{2}}{2}, AC = \frac{81\sqrt{2}}{2}$ である。よって $BC = BD + DC = \frac{81\sqrt{2}}{2}$ である。

$\triangle ABC$ の 3 辺の長さが求められたので、三角形の面積をヘロンの公式を用いて求めれば、$729\sqrt{2}$ となる。甲円はこの三角形に内接する円であるので、甲円の半径を r とすれば、三角形の面積は $\frac{1}{2}r(AB + BC + CA) = 54\sqrt{2}r$ となる。$54\sqrt{2}r = 729\sqrt{2}$ を解いて $r = \frac{27}{2}$ を得る。よって甲円径は 27 寸となる。

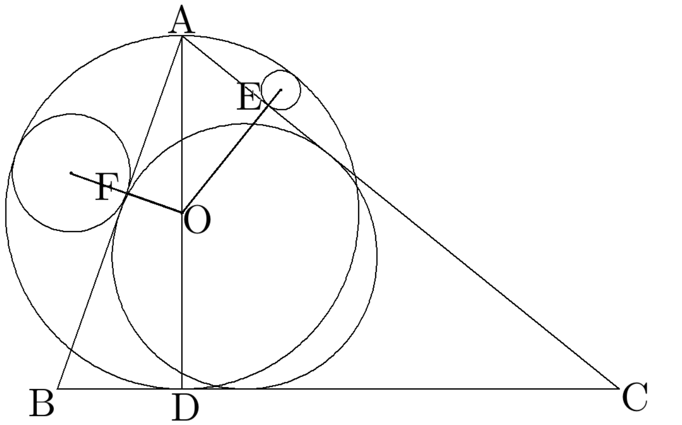


図 2