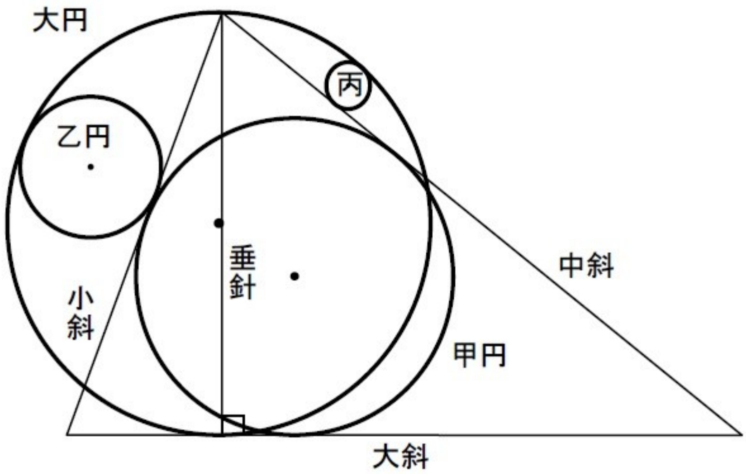
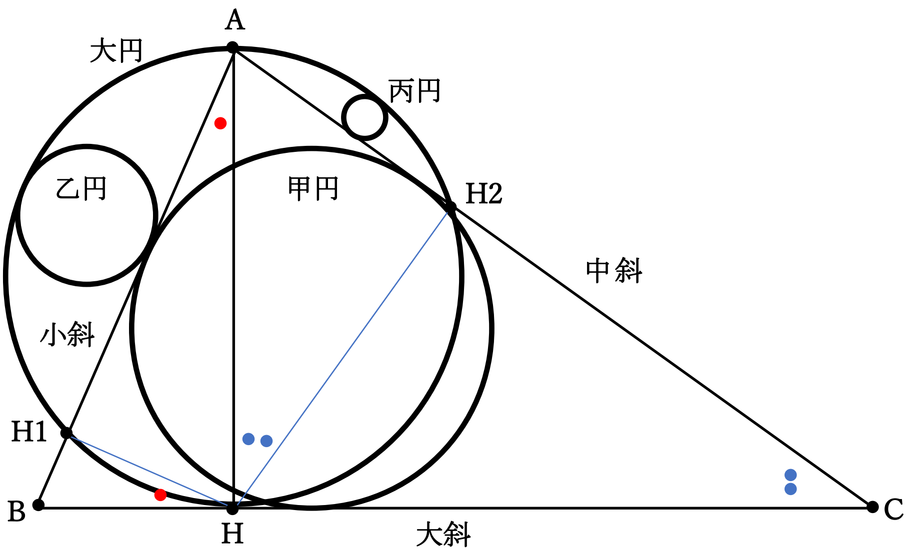
9 月問題 No.1



　図のように、三角形の内外に４つの円を書きます。小斜と中斜がつくる頂点から、大斜へ垂線を下し、これを仮に垂針と呼びます。
大円は垂針を直径とします。甲円は三角形の内接円で、乙円は小斜に接し、大円に内接します。丙円は中斜に接し、大円に内接します。
　大円の直径が３６寸，乙円の直径が１２寸，丙円の直径が４寸のとき、甲円の直径は何寸でしょうか？

「神壁算法（じんぺきさんぽう）」　　第６０問　から作成



【解答】

大円、乙円、丙円、甲円の半径をおのおの R、r_1、r_2、x とおく。また、大斜、中斜、小斜をおのおの a、b、c とおく。

1. △ABH の高さ（HH_1）,△ACH の高さ(HH_2)を求める

1.1）方べきの定理より、

$$\left\{\frac{AH_1}{2}\right\}^2 = (2r_1)(2R - 2r_1) = 4r_1(R - r_1) \quad \cdots(1)$$

$$\left\{\frac{AH_2}{2}\right\}^2 = (2r_2)(2R - 2r_2) = 4r_2(R - r_2) \quad \cdots(2)$$

1.2）高さ（HH_1）及び高さ(HH_2)を求める

(1)式より、

$$(AH_1)^2 = 16r_1(R - r_1) \therefore (AH_1) = 4\sqrt{r_1(R - r_1)} \quad \cdots(3)$$

(2)式より、

$$(AH_2)^2 = 16r_2(R - r_2) \therefore (AH_2) = 4\sqrt{r_2(R - r_2)} \quad \cdots(4)$$

を得る。3 平方の定理より、

$$\begin{aligned}(HH_1)^2 &= (AH)^2 - (AH_1)^2 \\ &= (2R)^2 - 16r_1(R - r_1) \\ &= 4R^2 - 16Rr_1 + 16{r_1}^2 \\ &= 4(R^2 - 4Rr_1 + 4{r_1}^2) \\ &= 4(R - 2r_1)^2 \quad \cdots(5)\end{aligned}$$

従って、

$$(HH_1) = 2(R - 2r_1) \quad (\because\ HH_1 > 0) \qquad \cdots(6)$$

同様にして、

$$(HH_2) = 2(R - 2r_2) \qquad \cdots(7)$$

2.　△ABC の各辺の長さを求める

2.1) (BH_1)及び(CH)を求める

△$\mathrm{AHH_1}$∽△$\mathrm{BHH_1}$ より、

$$\frac{(HH_1)}{(AH_1)} = \frac{(BH_1)}{(HH_1)} \qquad \therefore (BH_1) = \frac{(HH_1)^2}{(AH_1)} = \frac{4(R - 2r_1)^2}{4\sqrt{r_1(R - r_1)}} = \frac{(R - 2r_1)^2}{\sqrt{r_1(R - r_1)}} \qquad \cdots(8)$$

また、△$\mathrm{AHH_2}$∽△$\mathrm{CHH_2}$ より、

$$\frac{(AH)}{(AH_2)} = \frac{(CH)}{(HH_2)} \qquad \therefore (CH) = (HH_2)\frac{(AH)}{(AH_2)} = 2(R - 2r_2)\frac{2R}{4\sqrt{r_2(R - r_2)}}$$

$$= \frac{R(R - 2r_2)}{\sqrt{r_2(R - r_2)}} \qquad \cdots(9)$$

を得る。

2.2)線分の長さ(BH)及び($\mathrm{CH_2}$)を求める

3 平方の定理より、

$$(BH)^2 = (BH_1)^2 + (HH_1)^2$$

$$= \frac{(R - 2r_1)^4}{r_1(R - r_1)} + 4(R - 2r_1)^2$$

$$= (R - 2r_1)^2\left\{\frac{(R - 2r_1)^2}{r_1(R - r_1)} + 4\right\}$$

$$= (R - 2r_1)^2\frac{R^2 - 4Rr_1 + 4{r_1}^2 + 4Rr_1 - 4{r_1}^2}{r_1(R - r_1)}$$

$$= \frac{R^2(R - 2r_1)^2}{r_1(R - r_1)} \qquad \cdots(10)$$

また、

$$(CH_2)^2 = (CH)^2 - (HH_2)^2$$

$$= \frac{R^2(R - 2r_2)^2}{r_2(R - r_2)} - 4(R - 2r_2)^2$$

$$= (R - 2r_2)^2\left\{\frac{R^2}{r_2(R - r_2)} - 4\right\}$$

$$= (R - 2r_2)^2\frac{R^2 - 4Rr_2 + 4{r_2}^2}{r_2(R - r_2)}$$

$$= \frac{(R-2r_2)^4}{r_2(R-r_2)} \qquad \cdots(11)$$

2.3)三角形の３辺の長さを求める

（８）から（１１）式より、

$$a = (BH) + (CH)$$

$$= \frac{R(R-2r_1)}{\sqrt{r_1(R-r_1)}} + \frac{R(R-2r_2)}{\sqrt{r_2(R-r_2)}}$$

$$= \frac{R}{\sqrt{r_1 r_2(R-r_1)(R-r_2)}}\left\{(R-2r_1)\sqrt{r_2(R-r_2)} + (R-2r_2)\sqrt{r_1(R-r_1)}\right\}$$

$$b = (CH_2) + (AH_2)$$

$$= \frac{(R-2r_2)^2}{\sqrt{r_2(R-r_2)}} + 4\sqrt{r_2(R-r_2)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{r_2(R-r_2)}}(R^2 - 4Rr_2 + 4{r_2}^2 + 4Rr_2 - 4{r_2}^2)$$

$$= \frac{R^2}{\sqrt{r_2(R-r_2)}}$$

$$c = (AH_1) + (BH_1)$$

$$= 4\sqrt{r_1(R-r_1)} + \frac{(R-2r_1)^2}{\sqrt{r_1(R-r_1)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{r_1(R-r_1)}}(4Rr_1 - 4{r_1}^2 + R^2 - 4R{r_1}^2 + 4{r_1}^2)$$

$$= \frac{R^2}{\sqrt{r_1(R-r_1)}}$$

3.　△ABC の面積を求める

三角形 ABC の面積を $S_{\triangle ABC}$ とすると、

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}(a)(AH)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{R(R-2r_1)}{\sqrt{r_1(R-r_1)}} + \frac{R(R-2r_2)}{\sqrt{r_2(R-r_2)}}\right)(2R)$$

$$= R^2\left\{\frac{R-2r_1}{\sqrt{r_1(R-r_1)}} + \frac{R-2r_2}{\sqrt{r_2(R-r_2)}}\right\} \qquad \cdots(12)$$

また、三角形の辺の長さ a, b, c と内接円の半径 x と三角形の面積との間には、下式の関係があるので、これをこの問題に適用し、

$$S_{\triangle ABC} = x\frac{a+b+c}{2}$$

$$= \frac{x}{2}\left[\frac{R}{\sqrt{r_1 r_2 (R-r_1)(R-r_2)}}\left\{(R-2r_1)\sqrt{r_2(R-r_2)} + (R-2r_2)\sqrt{r_1(R-r_1)}\right\} + \frac{R^2}{\sqrt{r_2(R-r_2)}} + \frac{R^2}{\sqrt{r_1(R-r_1)}}\right]$$

$$= \frac{Rx}{2\sqrt{r_1 r_2 (R-r_1)(R-r_2)}}\left[(R-2r_1)\sqrt{r_2(R-r_2)} + (R-2r_2)\sqrt{r_1(R-r_1)} + R\sqrt{r_1(R-r_1)} + R\sqrt{r_2(R-r_2)}\right]$$

$$= \frac{Rx}{2\sqrt{r_1 r_2 (R-r_1)(R-r_2)}}\left[2(R-r_1)\sqrt{r_2(R-r_2)} + 2(R-r_2)\sqrt{r_1(R-r_1)}\right]$$

$$= \frac{Rx}{\sqrt{r_1 r_2 (R-r_1)(R-r_2)}}\left[(R-r_1)\sqrt{r_2(R-r_2)} + (R-r_2)\sqrt{r_1(R-r_1)}\right] \qquad \cdots(13)$$

4．甲円の径を求める

（１２）、（１３）式から

$$R^2\left\{\frac{R-2r_1}{\sqrt{r_1(R-r_1)}} + \frac{R-2r_2}{\sqrt{r_2(R-r_2)}}\right\} = \frac{Rx}{\sqrt{r_1 r_2 (R-r_1)(R-r_2)}}\left[(R-r_1)\sqrt{r_2(R-r_2)} + (R-r_2)\sqrt{r_1(R-r_1)}\right]$$

$$R\left\{(R-2r_1)\sqrt{r_2(R-r_2)} + (R-2r_2)\sqrt{r_1(R-r_1)}\right\} = x\left\{(R-r_1)\sqrt{r_2(R-r_2)} + (R-r_2)\sqrt{r_1(R-r_1)}\right\}$$

したがって、甲円の半径 x は、次式で与えられる。

$$x = \frac{(R-2r_1)\sqrt{r_2(R-r_2)} + (R-2r_2)\sqrt{r_1(R-r_1)}}{(R-r_1)\sqrt{r_2(R-r_2)} + (R-r_2)\sqrt{r_1(R-r_1)}}R$$

５．三角形の 3 辺から甲円径を求める

題意より、R=18 寸、r_1=6 寸、r_2=2 寸であるから、これらを上式に代入する。

$$x = \frac{(18-2\cdot 6)\sqrt{2(18-2)} + (18-2\cdot 2)\sqrt{6(18-6)}}{(18-6)\sqrt{2(18-2)} + (18-2)\sqrt{6(18-6)}}$$

$$= \frac{24\sqrt{2} + 84\sqrt{2}}{48\sqrt{2} + 96\sqrt{2}}(18)$$

$$= \frac{108\sqrt{2}}{144\sqrt{2}}(18)$$

$$= \frac{3}{4}(18)$$

$$= 13.5 \text{ 寸}$$

従って、甲円の直径は、$(2x) = 13.5 \cdot 2 = 27$ 寸となる。

(答　甲円径　27 寸)