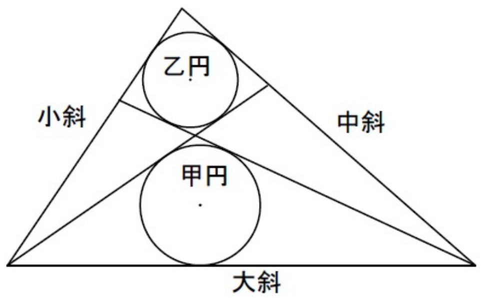
令和５年９月の問題-No.2

問題

出題図を図１に示す。



図のように、三角形の中を２本の線分で分割し、甲，乙の２円を容れます。
大斜３４５寸，中斜３２２寸，小斜２９９寸，甲円の直径が１１５寸のとき、乙円の直径は何寸でしょうか

「神壁算法（じんぺきさんぽう）」　第６３問　から作成

図１　出題図

解答

図 2 のように三角形の頂点と線分の交点に記号を付けて考える。まず、三角形の各頂点角度の余弦について求める。$AB = 299, AC = 322, BC = 345$ であるので、$\triangle ABC$ に余弦定理を用いて $\cos A = \frac{5}{13}, \cos B = \frac{33}{65}, \cos C = \frac{3}{5}$ を得る。続いて、辺の長さを $AD = a, AE = b, DF = c, EF = d, BF = e, CF = f$ として、これらの長さが図形の条件を満足する値を求める。$\triangle ABE, \triangle ACD$ に余弦定理を用いて以下の式が成立する。

$$(d+e)^2 = 299^2 + b^2 - 2 * 299b * \frac{5}{13} \tag{1}$$

$$(c+f)^2 = a^2 + 322^2 - 2 * 322a * \frac{5}{13} \tag{2}$$

また、四角形 $ADFE$ は乙円に外接するので、円に外接する四角形の性質より以下の式が成立する。

$$a + d = b + c \tag{3}$$

$\triangle BCF$ の面積について、三角形に内接する円の半径と三角形の辺の長さから求められる値とヘロンの公式から得られる値とが一致することから、以下の式が成立する。

$$\frac{1}{2}\left(\frac{115}{2}\right)(e+f+345) = \sqrt{s(s-e)(s-f)(s-345)} \tag{4}$$

ここで

$$s = \frac{e+f+345}{2} \tag{5}$$

である。

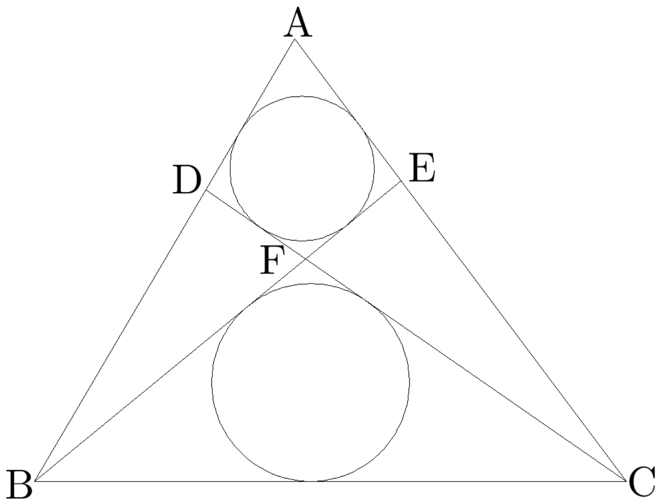


図 2

$\angle DFB = \angle EFC, \angle DFE = \angle BFC$ であるので、余弦の値が一致することから以下の式が成立する。

$$\frac{c^2 + e^2 - (299 - a)^2}{2ce} = \frac{d^2 + f^2 - (322 - b)^2}{2df} \tag{6}$$

$$\frac{c^2 + d^2 - (a^2 + b^2 - 2ab\frac{5}{13})}{2cd} = \frac{e^2 + f^2 - 345^2}{2ef} \tag{7}$$

ここで、余弦定理による以下の関係

$$DE^2 = a^2 + b^2 - 2ab\frac{5}{13} \tag{8}$$

を用いた。

これらの式を満たす正の値として以下の結果を得る。

$$a = \frac{3367}{33} \tag{9}$$

$$b = \frac{413}{4} \tag{10}$$

$$c = \frac{464212}{6567} \tag{11}$$

$$d = \frac{57239}{796} \tag{12}$$

$$e = \frac{40664}{199} \tag{13}$$

$$f = \frac{45241}{199} \tag{14}$$

これより、辺の長さ $AB = 299, AE = \frac{413}{4}, BE = d + e = \frac{1105}{4}$ を得る。$\triangle ABE$ の面積を、内接する乙円半径 r として求めた値とヘロンの公式による値とが一致することから、以下の式が成立する。

$$\frac{1}{2}r(299 + \frac{413}{4} + \frac{1105}{4}) = \frac{28497}{2} \tag{15}$$

これを解いて $r = 42$ を得る。よって乙円径は 84 寸となる。$\triangle ABE$ のかわりに $\triangle ACD$ を用いても結果は一致する。