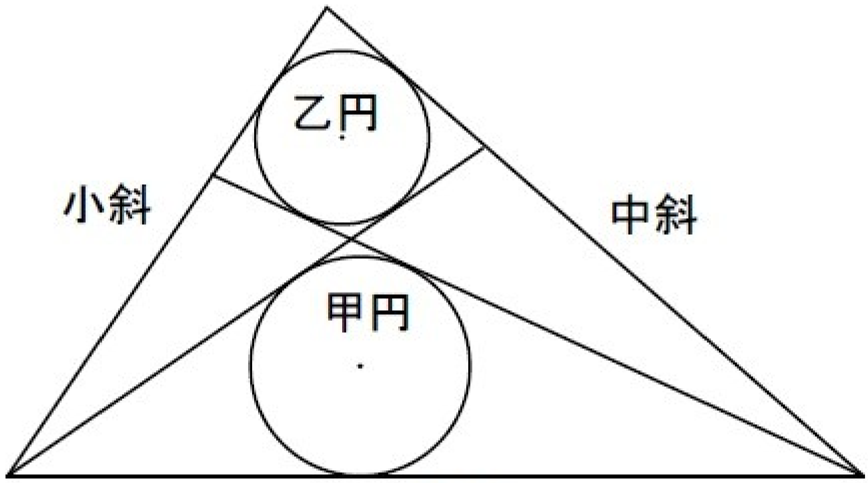
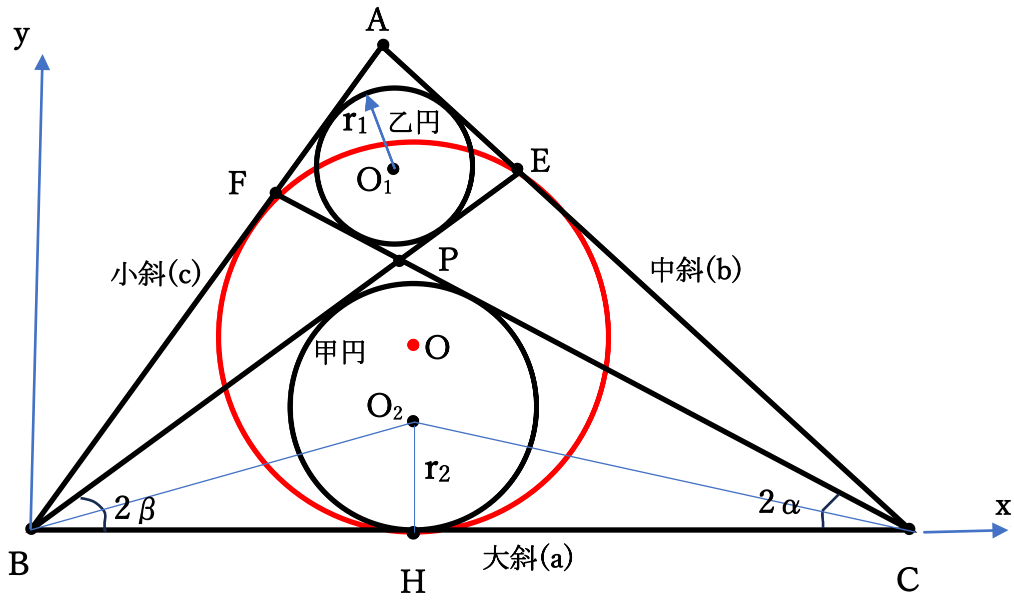
9 月問題 No.2



　図のように、三角形の中を２本の線分で分割し、甲，乙の２円を容れます。

　大斜３４５寸，中斜３２２寸，小斜２９９寸，甲円の直径が１１５寸のとき、乙円の直径は何寸でしょうか

「神壁算法（じんぺきさんぽう）」　　第６３問　から作成



【解答】

大斜、中斜、小斜の長さをおのおのを a,b,c とし、乙円（O_1）、甲円（O_2）の半径をr_1, r_2とする。

また、三角形 ABC に内接する円を追加で引く（図中赤色で示す）。そして、x − y 座標系の原点を点Ｂの位置に置く。また、$\angle EBC = 2\beta, \angle FCB = 2\alpha$とする。

1. 点 A の座標を求める

1.1)三角形 ABC の面積を求める

三角形 ABC の面積を$S_{\Delta ABC}$とし、$S = \frac{1}{2}(a+b+c)$とすると、三角形 ABC の面積は、ヘロンの公式より、次式で与えられる。

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

1.2)三角形 ABC の高さを求める

点 A から辺 BC に下した高さを h とすると、三角形ＡＢＣの面積は$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}(a)(h)$で与えられるので、これを 1.1)項の式に代入する。

$$\frac{1}{2}ah = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\therefore \quad h = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{a} \qquad \cdots(1)$$

本問題では、a=345 寸、b=322 寸、c=299 寸であるから、これらを上式に代入する。

$$h = \frac{2\sqrt{483(483-345)(483-322)(483-299)}}{345}$$

$$= 257.6 \text{ 寸}$$

$$= A_y$$

1.3）点 A の座標を求める

3 平方の定理より、

$$A_x = \sqrt{c^2 - {A_y}^2}$$
$$= \sqrt{299^2 - 257.6^2}$$
$$= 151.8 \text{ 寸}$$

を得る。これらより、点 A の座標は、次の通り。

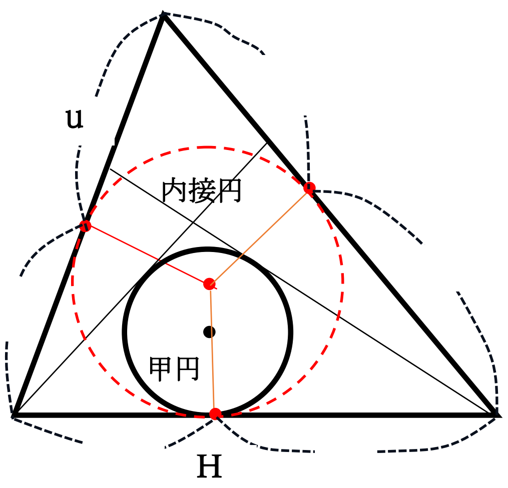
点 A (151.8 , 257.6)

となる。

2. $\tan 2\propto, \tan 2\beta$を求める

2. 1) 甲円中心の水平方向位置を求める

右図に示す内接円の中心の水平方向位置は、甲円中心の水平方向位置と同一になるという性質を用いて、外側の三角形から甲円の中心位置を求める。



大斜が a, 中斜が b、小斜が c であるとき、右図で示す三角形の各頂点から内接円の中心から各辺に下した垂線の足までの長さは、下式で与えられる。

（ $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ ）

$$p = s - b$$
$$q = s - c$$
$$u = s - a$$

従って、右図の点 H の水平方向位置（Hx）は、

$$H_x = p = s - b$$

また、

$$q = s - c$$

となる。

2.2）$\tan\propto, \tan\beta$を求める

図より、

$$\tan\alpha = \frac{r_2}{q} = \frac{r_2}{s-c}$$

を得る。同様に、

$$\tan\beta = \frac{r_2}{p} = \frac{r_2}{s-b}$$

となる。

2.3）$\tan 2\propto, \tan 2\beta$を求める

倍角の公式から、

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan\alpha^2}$$

$$= \frac{2\frac{r_2}{s-c}}{1-\left(\frac{r_2}{s-c}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{2r_2}{s-c}}{\frac{(s-c)^2-{r_2}^2}{(s-c)^2}}$$

$$= \frac{2r_2(s-c)}{(s-c)^2-{r_2}^2} \qquad \cdots(2)$$

同様に、

$$\tan 2\beta = \frac{2r_2(s-b)}{(s-b)^2-{r_2}^2} \qquad \cdots(3)$$

となる。

3.　直線 AB, AC の式を求める

点 A、B、C の座標を以下にまとめる。

点 A（151.8 ， 257.6 ）　，　点 B（ 0, 0 ）　, 点 C（ 345，　0 ）

3. 1）直線 AB の式

直線の式を$y = mx + n$とすると、直線 AB は原点を通るので、n=0 であり、$m = \frac{A_y}{A_x}$であるから、

$$y = \frac{257.6}{151.8}x + 0 = \frac{56}{33}x \qquad \cdots(4)$$

となる。

3.2）直線 AC の式

直線 AC は点 A,C を通るので、

$$\begin{cases} (m)(151.8) + n = 257.6 \\ (m)(345) + n = 0 \end{cases}$$

を満足する。両者を連立して解き、直線 AC の式を求める。結果は、

$$y = -\frac{4}{3}x + 460 \qquad \ldots(5)$$

となる。

4. 直線 BE,CF の式を求める

4.1）直線 BE の式

直線 BE は、傾き$m = \tan 2\beta$であり、原点を通るので n=0 である。よって、(3)式より、

$$y = (\tan 2\beta)(x) = \frac{2r_2(s-b)}{(s-b)^2 - {r_2}^2}(x) = \frac{2(115/2)(483-322)}{(483-322)^2 - (115/2)^2}(x) = \frac{140}{171}x \qquad \cdots(6)$$

となる。

4.2）直線 CF の式

直線 CF の傾きは、$m = (-\tan 2\alpha)$であり、点 C を通るので、直線 CF の式は、

$$\begin{aligned} 0 &= (-\tan 2\alpha)(345) + n \\ &= -\frac{2r_2(s-c)}{(s-c)^2 - {r_2}^2}(345) + n \\ &= -\frac{2(115/2)(483-299)}{(483-299)^2 - (115/2)^2}(345) + n \\ &= -238\frac{74}{77} + n \end{aligned}$$

$$\therefore \quad n = 238\frac{74}{77}$$

となるから、直線 CF の式は、

$$y = -\frac{160}{231}x + 238\frac{74}{77} \qquad \cdots(7)$$

となる。

5. 点 P の座標を求める

点 P は、直線 BE と直線 CF の交点であるから、(6),(7)式を連立して解く。すると、点 P の座標は$\left(158\frac{22}{199}, 129\frac{89}{199}\right)$となる。

6. 点 E の座標を求める

点 E は直線 AC と直線 BE の交点であるから、(5),(6)式を連立して解く。すると、点 E の座標は$\left(213\frac{3}{4}, 175\right)$となる。

7. 点 F の座標を求める

点 F は直線 AB と直線 CF の交点であるから、(4),(7)式を連立して解く。すると、点 F の座標は$\left(100, 169\frac{23}{33}\right)$となる。

8. 点 A、F、P、E の座標を分かりやすくするため、まとめる。

点 A (151.8, 257.6)　点 E (213.75, 175) 点 F$\left(100, 169\frac{23}{33}\right)$ 点 P （$158\frac{22}{199}, 129\frac{89}{199}$）

9. 四辺形 AFPE の面積を求める

ベクトルの外積を用いて、四辺形 AFPE の面積を求める。まずはじめに、四角形 AFPE の各辺のベクトルを求める。

$$\overrightarrow{PF} = \left(100 - 158\tfrac{22}{199}\right)i + \left(169\tfrac{23}{33} - 129\tfrac{89}{199}\right)j$$

$$= -58\frac{22}{199}i + 40.24973352j$$

$$\overrightarrow{PE} = \left(213\frac{3}{4} - 158\frac{22}{199}\right)i + \left(175 - 129\frac{89}{199}\right)j$$

$$= 55\frac{509}{796}i + 45\frac{110}{199}j$$

$$\overrightarrow{PA} = \left(151.8 - 158\frac{22}{199}\right)i + \left(257.6 - 129\frac{89}{199}\right)j$$

$$= -6\frac{309}{995}i + \frac{127512}{995}j$$

これより、

$$\overrightarrow{(PF)}x\overrightarrow{(PA)} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -58\frac{22}{199} & 40.24973352 & 0 \\ -6\frac{309}{995} & \frac{127512}{995} & 0 \end{vmatrix} = -7193.029877\,k$$

$$\overrightarrow{(PE)}x\overrightarrow{(PA)} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 55\frac{509}{796} & 45\frac{110}{199} & 0 \\ -6\frac{309}{995} & \frac{127512}{995} & 0 \end{vmatrix} = 7417.81206\,k$$

であるから、

$$\mathrm{S}_{\square\mathrm{AFPE}} = \frac{1}{2}\left[\left\|\overrightarrow{PF}x\overrightarrow{PA}\right\| + \left\|\overrightarrow{PE}x\overrightarrow{PA}\right\|\right] = \frac{1}{2}(14610.84194) = 7305.420969$$

となる。

10. 四角形 AFPE の周長を求める

四角形 AFPE の４辺の長さを求める。

$$(AF) = \sqrt{(151.8 - 100)^2 + \left(257.6 - 169\frac{23}{33}\right)^2} = 102\frac{1}{33}$$

$$(FP) = \sqrt{\left(100 - 158\frac{22}{199}\right)^2 + \left(169\frac{23}{33} - 129\frac{89}{199}\right)^2} = 70.68859449$$

$$(PE) = \sqrt{\left(213\frac{3}{4} - 158\frac{22}{199}\right)^2 + \left(175 - 129\frac{89}{199}\right)^2} = 71\frac{723}{796}$$

$$(AE) = \sqrt{\left(151.8 - 213\frac{3}{4}\right)^2 + (257.6 - 175)^2} = 103\frac{1}{4}$$

乙円にの外接する四角形の周の長さの半分を s'とすると、以下の通りとなる。

$$s' = \frac{1}{2}\left(102\frac{1}{33} + 70.68859449 + 71\frac{723}{796} + 103\frac{1}{4}\right)$$
$$= 173.9385945$$

11.　乙円の径を求める

四角形の面積は、その周長と内接円の半径の積で与えられる。つまり、

$$\mathrm{S}_{\square\mathrm{AFPE}} = (r_1)(s')$$

となる。9 項及び 10 項の結果から、乙円の半径は、

$$r_1 = \frac{\mathrm{S}_{\mathrm{AFPE}}}{s'} = \frac{7305.420969}{173.9385945} = 42$$

となる。よって、乙円の直径は$(2r_1) = 2x42 = 84$寸となる。

（答え　乙円径　84 寸）