群和研・令和 5 年 9 月の問題 - No.2

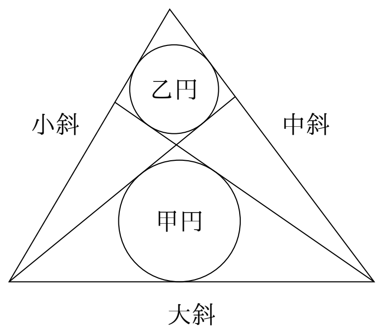
問題

図のように，三角形の中を 2 本の線分で分割し，甲，乙の 2 円を容れます．

大斜 345 寸，中斜 322 寸，小斜 299 寸，甲円の直径が 115 寸のとき，乙円の直径は何寸でしょうか．

『神壁算法』　第 63 問　から作成

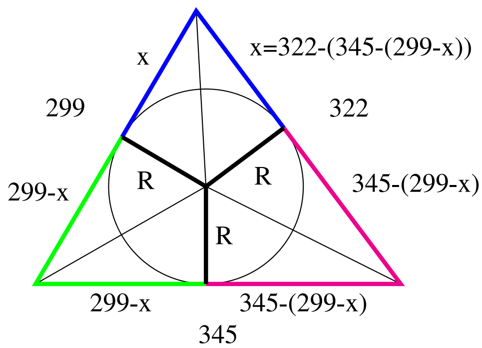
図

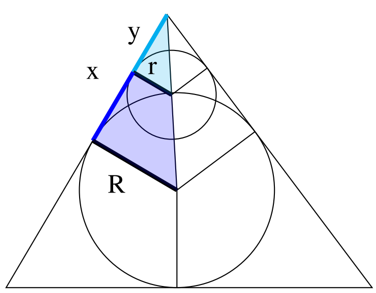


解法

①三角形の内接円を考え，x と半径 R を求める．

これを用い，y を乙円の半径 r で表す．





x は，同じ色の線の長さが等しいことから，

$x = 322 - (345 - (299 - x))$

$\therefore\ x = 138\,(= 2 \cdot 3 \cdot 23)$

R は，三角形の面積 S から求める．

$S = \frac{1}{2}\,(345 + 322 + 299)\,R = 3 \cdot 7 \cdot 23 \cdot R$

一方，ヘロンの公式より，

$s = \frac{1}{2}\,(345 + 322 + 299) = 483$

$S = \sqrt{s\,(345 - s)\,(322 - s)\,(299 - s)}$

$\quad = 2^2 \cdot 3 \cdot\ 7 \cdot 23^2$

$\therefore\ R = 2^2 \cdot 23 = 92$

整理すると，

$x : R = 138 : 92 = 3 : 2$

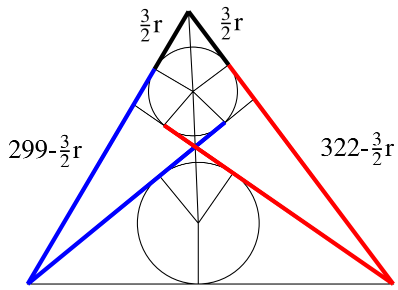
水色と青色の三角形は相似のため，

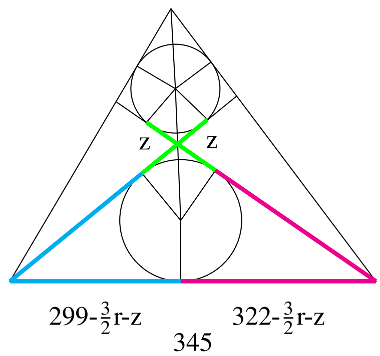
$y : r = x : R = 3 : 2$

$\therefore\ y = \frac{3}{2}r$

②大斜に着目する．同じ色の線の長さは等しい．

z を r で表し，水色と桃色の長さを求める．





$\left(299 - \frac{3}{2}r - z\right) + \left(322 - \frac{3}{2}r - z\right) = 345$

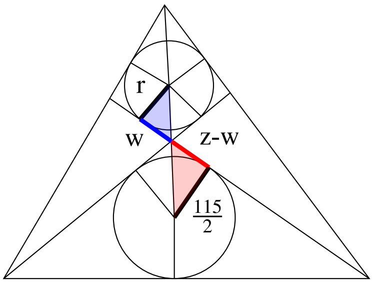
$\therefore\ z = 138 - \frac{3}{2}r$

桃色の長さは，水色よりも 23 だけ長いから，

$(345 - 23) \div 2 = 161$

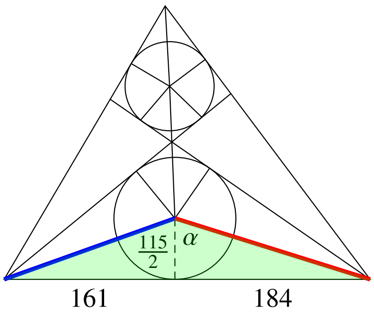
$\therefore$ 水色 $= 161$，桃色 $= 184$

③青色と赤色の三角形は相似より，w を求める．



$$w : r = z - w : \tfrac{115}{2}$$
$$= \left(138 - \tfrac{3}{2}r\right) - w : \tfrac{115}{2}$$
$$\therefore\ w = \frac{3r\,(92 - r)}{2r + 115}$$

④緑色の三角形から，角度α $(\cos\alpha)$ を求める．



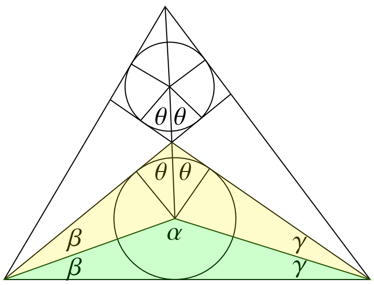
青線と赤線の長さを三平方の定理で求める．

$$\text{青線} = \sqrt{161^2 + \left(\tfrac{115}{2}\right)^2} = \tfrac{23\sqrt{221}}{2}$$
$$\text{赤線} = \sqrt{184^2 + \left(\tfrac{115}{2}\right)^2} = \tfrac{23\sqrt{281}}{2}$$

続いて，余弦定理より，

$$\cos\alpha = \frac{\left(\frac{23\sqrt{221}}{2}\right)^2 + \left(\frac{23\sqrt{281}}{2}\right)^2 - 345^2}{2 \cdot \frac{23\sqrt{221}}{2} \cdot \frac{23\sqrt{281}}{2}}$$
$$= -\tfrac{199}{\sqrt{62101}}$$

⑤角度θ を α で表すと，目的の r が求まる．



緑色の三角形の内角の和から，

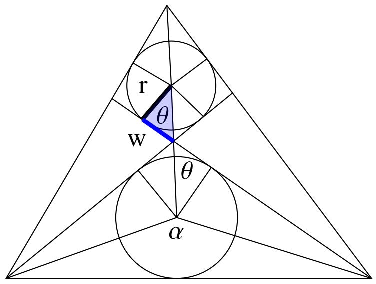
$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

緑色と黄色の三角形の内角の和から，

$$2\,(\beta + \gamma + \theta) = 180^\circ$$

整理すると，

$$\theta = \alpha - 90^\circ$$



青色の三角形より，

$$\tan\theta = \frac{r}{w} = \frac{2r + 115}{3\,(92 - r)}$$

また，

$$\tan\theta = \tan(\alpha - 90^\circ) = -\frac{1}{\tan\alpha} = -\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$
$$= -\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1 - \cos^2\alpha}} = -\frac{\left(-\frac{199}{\sqrt{62101}}\right)}{\sqrt{1 - \left(-\frac{199}{\sqrt{62101}}\right)^2}}$$
$$= \frac{199}{\sqrt{22500}} = \frac{199}{150}$$

よって，

$$\tan\theta = \frac{2r + 115}{3\,(92 - r)} = \frac{199}{150} \ \text{より，}\ r = 42$$

以上により，乙円の直径は，$2r = 84$ 寸と求まる．

答え

乙円の直径 $= 84$ 寸