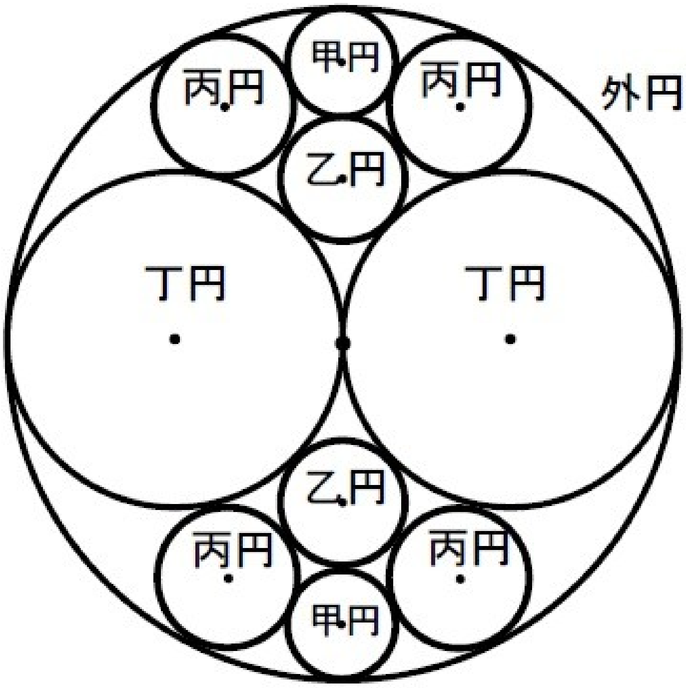
10 月問題 No.1

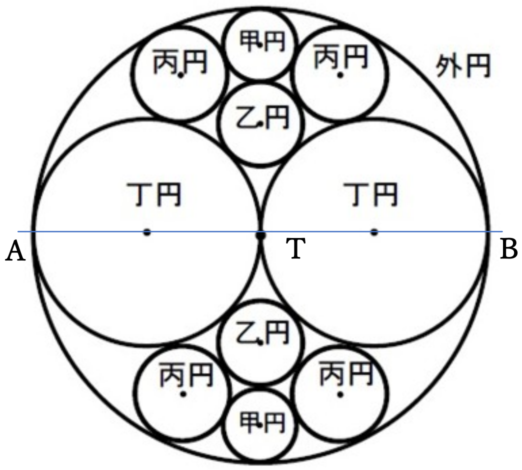


　図のように、外円内に１０個の円を互いに接するように容れます。

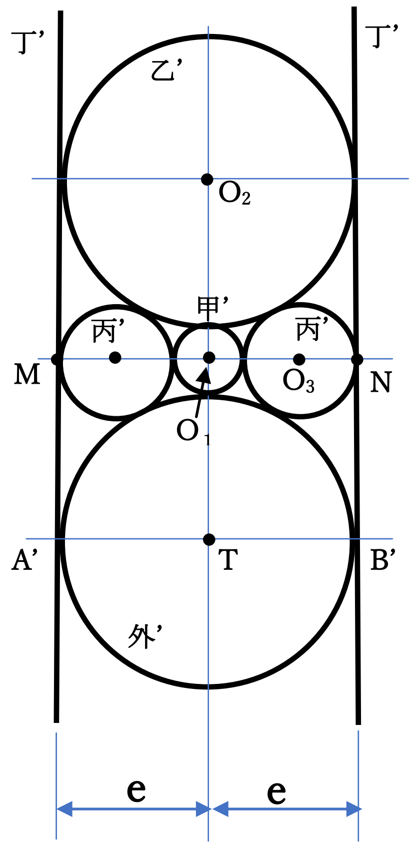
　甲円の直径が、３寸零５厘（３．０５寸）のとき、外円の直径は、何寸でしょうか？

（$\sqrt{5}$ ≒ ２．２３６を使い、寸を単位として、少数第２位まで求めて下さい）

「神壁算法（じんぺきさんぽう）」　　第３０問　から作成



10 月問題 No.1 元図



（解答）

ステップ１（反転図を作成する）

外円、甲円、乙円、丙円、丁円の半径をおのおのR, r_1, r_2, r_3, r_4とする。また、反転図において、甲’円、乙’円、丙’円の中心をおのおの O$_1$、O$_2$、O$_3$ とする。また、反転円の甲’円、丙’円の半径をr_1', r_3'とする。

丁円（左側）と丁円（右側）の接点を中心に反転する。また、反転円の半径は k=1 とする。すると、反転の定義より、

$$(TA)\cdot(TA') = k^2 = 1 \quad \therefore\ (TA') = \frac{k^2}{(TA)} = \frac{1}{2r_4}$$

となる。ここで、

$$e = \frac{1}{2r_4} = \frac{1}{R} \qquad \cdots\ (1)$$

と置く。

ステップ２（反転円の半径比率を求める）

反転図において、三角形 TO$_1$O$_3$ に対して、3 平方の定理より、

$$(O_1O_3)^2 = (TO_3)^2 - (TO_1)^2$$
$$= (e + r_3')^2 - (e + r_1')^2 \qquad \cdots\ (2)$$

また、反転図より

$$(O_1O_3) = r_1' + r_3' \qquad \cdots (3)$$
$$(TB') = e = r_1' + 2(r_3') \qquad \cdots (4)$$

という関係が分かる。（３）、（４）式を（２）式に代入し、r_1', r_3' を求める。

$$(e - 2r_3' + r_3'\,)^2 = (e + r_3')^2 - (e + e - 2r_3')^2$$
$$(e - r_3')^2 = (e + r_3')^2 - (2e - 2r_3')^2$$
$$5(e - r_3')^2 - (e + r_3')^2 = 0$$
$$4e^2 - 12er_3' + 4(r_3')^2 = 0$$
$$e^2 - 3er_3' + (r_3')^2 = 0$$

上式より、r_3'について解く。

$$r_3' = \frac{1}{2}\left\{3e \pm \sqrt{(3e)^2 - 4\cdot 1\cdot (e)^2}\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\left(3e \pm e\sqrt{9-4}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(3e \pm e\sqrt{5}\right)$$

ここで、$r_3' < e$であるから、

$$r_3' = \frac{1}{2}\left(3 - \sqrt{5}\right)e \qquad \cdots (5)$$

を得る。(5）式を（4）式に代入し、

$$r_1' = e - 2r_3' = \left(\sqrt{5} - 2\right)e \qquad \cdots (6)$$

を得る。

<u>ステップ３（反転中心Ｔから甲'円に引いた接線の長さｔを求める）</u>

次のステップで用いるため、反転中心Ｔから甲'円に引いた接線の長さ（ｔ）を求める。

$$(t)^2 = (r_1' + e)^2 - (r_1')^2$$
$$= 2\left(\sqrt{5} - 2\right)e\cdot e + e^2$$
$$= \left(2\sqrt{5} - 4 + 1\right)e^2$$
$$= \left(2\sqrt{5} - 3\right)e^2 \qquad \cdots (7)$$

<u>ステップ４（e を求める）</u>

反転基本式より元図の r_1 と反転図の e の関係を求める。

$$r_1 = \frac{k^2}{t^2} r_1'$$
$$= \frac{1}{\left(2\sqrt{5} - 3\right)e^2}\left(\sqrt{5} - 2\right)e$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\left(\sqrt{5}-2\right)}{\left(2\sqrt{5}-3\right)e} \\
&= \frac{\left(\sqrt{5}-2\right)\cdot\left(2\sqrt{5}+3\right)}{\left(2\sqrt{5}-3\right)\cdot\left(2\sqrt{5}+3\right)e} \\
&= \frac{2\cdot 5+3\sqrt{5}-4\sqrt{5}-6}{(4\cdot 5-9)e} \\
&= \frac{4-\sqrt{5}}{11e}
\end{aligned}
$$

上式及び（１）式より、

$$
e = \frac{1}{R} = \frac{4-\sqrt{5}}{11r_1} \qquad \cdots (8)
$$

となる。

ステップ５（外円形を求める）

（８）式より、

$$
R = \frac{11r_1}{4-\sqrt{5}} \qquad \dots (9)
$$

を得る。

ここで、問題より、$r_1 = \frac{3.05}{2}$寸であるから、（８）式を適用し、

$$
R = \frac{11}{4-\sqrt{5}}\cdot\frac{3.05}{2} = 9.5100037
$$

となる。従って、外円の直径は 2R＝19.020007 寸となる。小数点以下 2 桁までを取ると、19.02 寸となる。

（答　外円直径 19.02 寸）