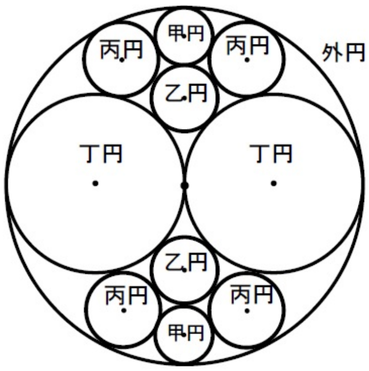
令和 5 年 10 月の問題-No.1

問題

出題図を図 1 に示す。



図のように、外円内に１０個の円を互いに接するように容れます。

甲円の直径が、３寸零５厘（３．０５寸）のとき、外円の直径は、何寸でしょうか？

（$\sqrt{5}$ ≒ ２．２３６を使い、寸を単位として、少数第２位まで求めて下さい）

「神壁算法（じんぺきさんぽう）」　第３０問　から作成

図 1　出題図

解答

甲円の半径を 1 と正規化して、図形の対称性から図 2 のように原点に外円の中心をとって考える。甲円の半径を 1、乙丙丁円の半径をそれぞれ r_2, r_3, r_4 とすれば、甲乙丁円の中心点の座標は図 2 の通りとなる。また、丙円中心の座標を (a, b) とする。

甲丙、乙丙、丁丙、乙丁円の外接条件、および丙円が外円に内接する条件から、以下の式が成立する。

$$(0-a)^2+(2r_4-1-b)^2=(1+r_3)^2 \tag{1}$$
$$(0-a)^2+(2r_4-2-r_2-b)^2=(r_2+r_3)^2 \tag{2}$$
$$(r_4-a)^2+(0-b)^2=(r_3+r_4)^2 \tag{3}$$
$$r_4^2+(2r_4-2-r_2)^2=(r_2+r_4)^2 \tag{4}$$
$$a^2+b^2=(2r_4-r_3)^2 \tag{5}$$

これらの 5 式を満たす a, b, r_1, r_2, r_3 を求めると、以下の結果を得る。

$$a=\frac{19+13\sqrt{5}}{22} \tag{6}$$
$$b=\frac{19+13\sqrt{5}}{11} \tag{7}$$
$$r_2=\frac{12+5\sqrt{5}}{19} \tag{8}$$
$$r_3=\frac{23+3\sqrt{5}}{22} \tag{9}$$
$$r_4=2+\frac{\sqrt{5}}{2} \tag{10}$$

設問では、甲円の直径が 3.05 寸であったので、その半径は 1.525 寸である。よって、設問のスケールにおける外円の直径は $4r_4*1.525=4(2+\frac{\sqrt{5}}{2})*1.525 \fallingdotseq 4(2+\frac{2.236}{2})*1.525=19.0198 \fallingdotseq 19.02$ 寸となる。

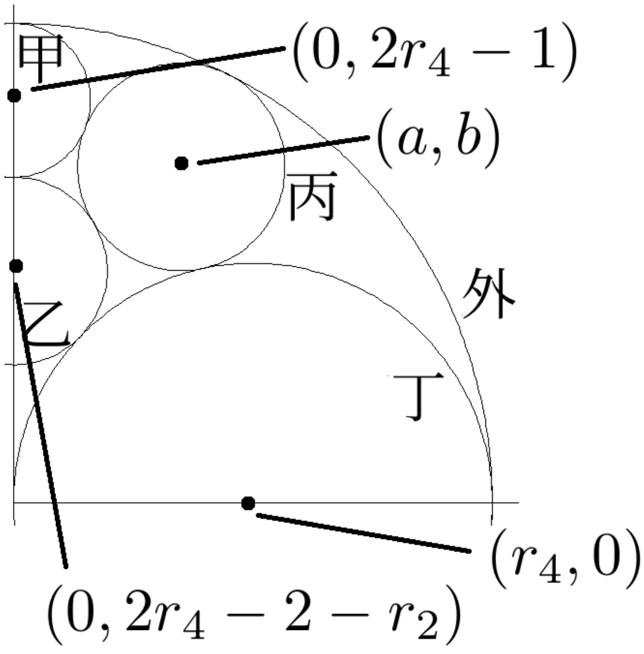


図 2