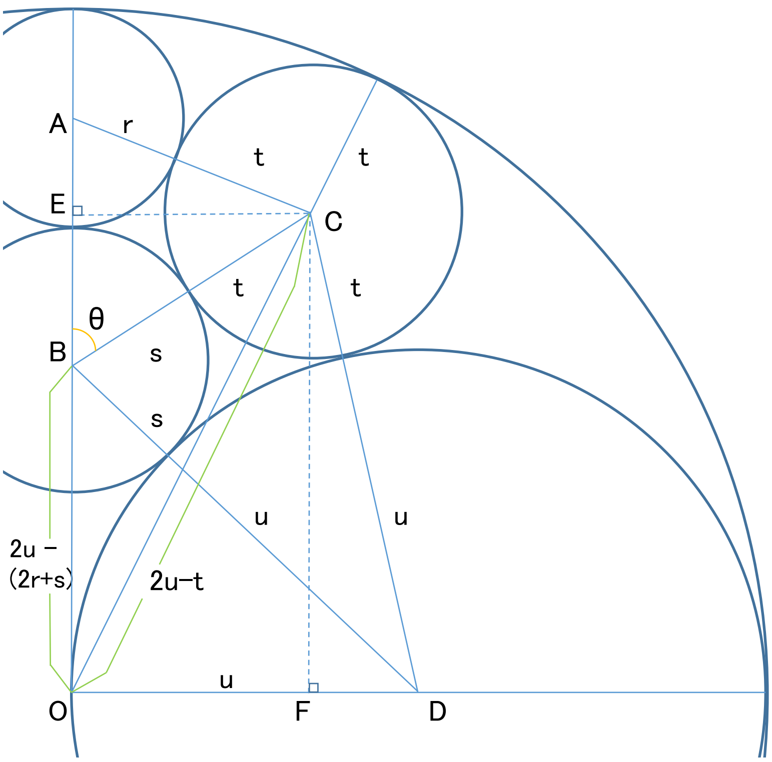
令和5年10月の問題ーNo.1

甲、乙、丙、丁の円の半径をそれぞれ r, s, t, u とする。



△BODより、 $\left[2u-(2r+s)\right]^2+u^2=(s+u)^2$

$s=\dfrac{2(u-r)^2}{3u-2r}$ ———①

△ABCより、

$(r+t)^2=(r+s)^2+(s+t)^2-2(r+s)(s+t)\cdot\cos(\theta)$

$\cos(\theta)=1-\dfrac{2rt}{(r+s)(s+t)}$

$\sin(\theta)=\dfrac{2\sqrt{rst(r+s+t)}}{(r+s)(s+t)}$

$a=(s+t)\cdot\cos(\theta)$ とおくと、△AEC、△OECより、 $(r+t)^2-(r+s-a)^2=(2u-t)^2-\left[2(u-r)-s+a\right]^2$

$(2u-r)a=-2ut+4ur-2r^2+2(u-r)s+rs-rt$

$(2u-r)(s+t)\left[1-\dfrac{2rt}{(r+s)(s+t)}\right]=-2ut+4ur-2r^2+2us-r(s+t)$

$t=\dfrac{r(r+s)(2u-r)}{r^2+2us}$ ———②

$b=(s+t)\cdot\sin(\theta)$ とおくと、△OFC、△DFCより、 $(2u-t)^2-b^2=(t+u)^2-(u-b)^2$

$2u-3t=b=(s+t)\cdot\sin(\theta)=\dfrac{2\sqrt{rst(r+s+t)}}{r+s}$

$(2u-3t)^2(r+s)^2=4rst(r+s+t)$

式②より、 $\left[2u-\dfrac{3r(r+s)(2u-r)}{r^2+2us}\right]^2\cdot(r+s)^2=4rs\cdot\dfrac{r(r+s)(2u-r)}{r^2+2us}\left[(r+s)+\dfrac{r(r+s)(2u-r)}{r^2+2us}\right]$

$\left[2u\left(r^2+2us\right)-3r(r+s)(2u-r)\right]^2=8r^2us(r+s)(2u-r)$

式①より、 $r+s=\dfrac{r(3u-2r)+2(u-r)^2}{3u-2r}=\dfrac{u(2u-r)}{3u-2r}$

$2u\left(r^2+2us\right)-3r(r+s)(2u-r)=2u\left[r^2+\dfrac{4u(u-r)^2}{3u-2r}\right]-3r\cdot\dfrac{u(2u-r)}{3u-2r}(2u-r)$

$=\dfrac{u}{3u-2r}\left[2r^2(3u-2r)+8u(u-r)^2-3r(2u-r)^2\right]=\dfrac{u(2u-r)\left(4u^2-12ur+7r^2\right)}{3u-2r}$

$\left[\dfrac{u(2u-r)\left(4u^2-12ur+7r^2\right)}{3u-2r}\right]^2=8r^2u\cdot\dfrac{2(u-r)^2}{3u-2r}\cdot\dfrac{u(2u-r)}{3u-2r}(2u-r)$

$(2u-r)^2\left(4u^2-12ur+7r^2\right)^2=16r^2(2u-r)^2(u-r)^2$

$4u^2-12ru+7r^2=4r(u-r)$

$4u^2-16ru+11r^2=0$ u>r より、 $u=\dfrac{4+\sqrt{5}}{2}r$

$r=\dfrac{3.05}{2}$ 寸より、 $4u=\left(4+\sqrt{5}\right)\cdot2r=\left(4+\sqrt{5}\right)\cdot3.05$ ≒ 19.02

∴外円の直径 ≒ 19.02寸