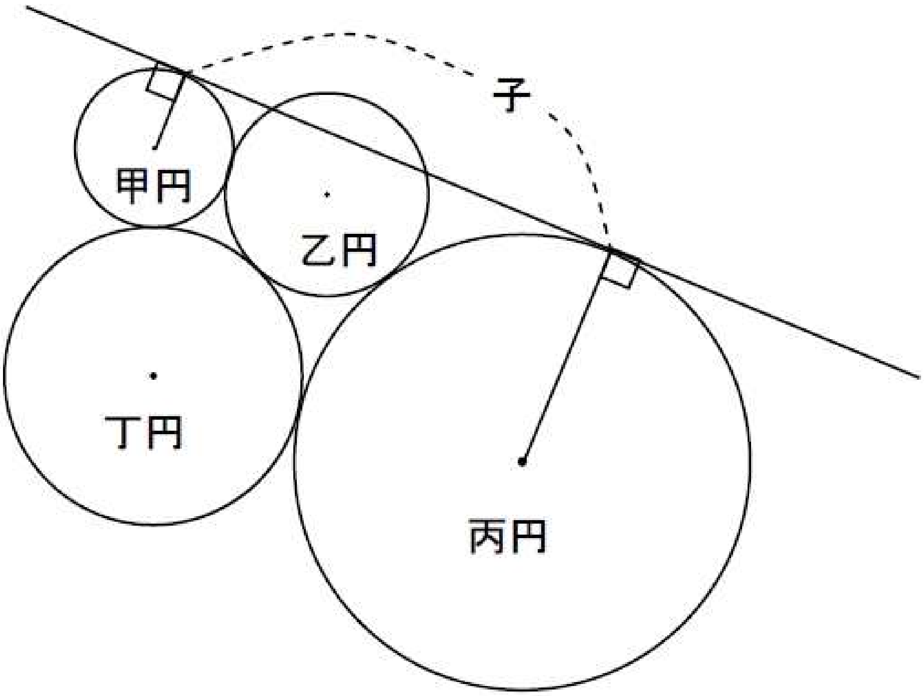
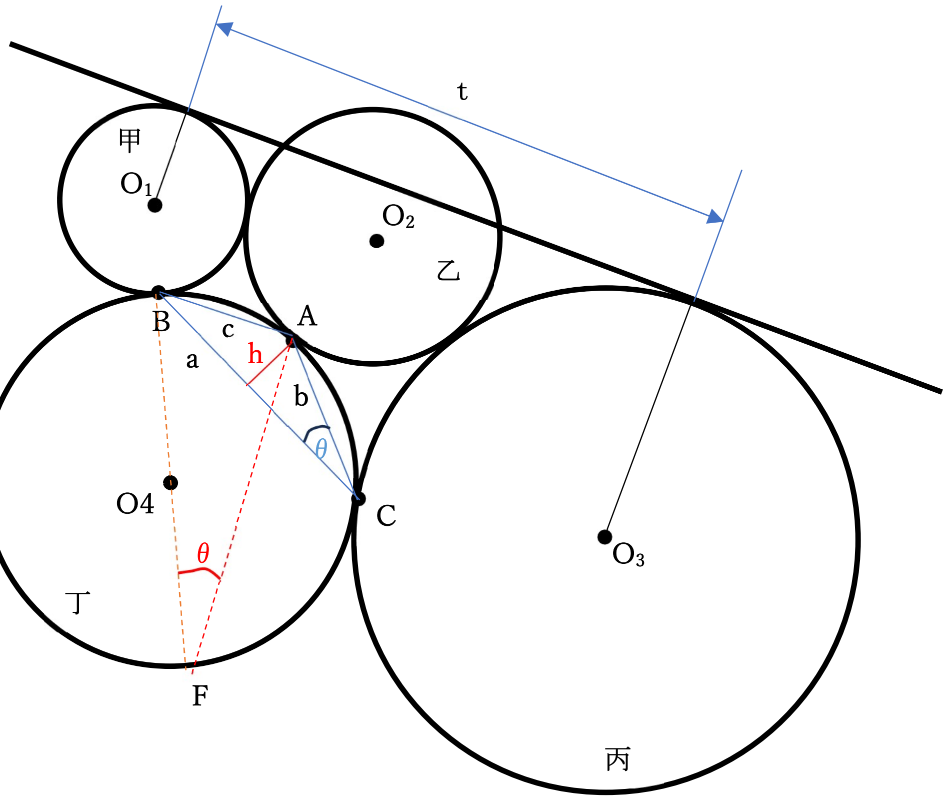
10 月問題 No.2



図のように、外接している４個の円があります。
甲円と丙円の共通接線の長さを子とします。
甲円の直径を甲，乙円の直径を乙，丙円の直径を丙，
丁円の直径を丁とします。
このとき、次のように表せることを示して下さい。

$$
\begin{aligned}
&\text{乙}^2 \times \text{丁}^2 \times (\text{甲} - \text{丙})^2 \\
&\quad - 2 \times \text{子}^2 \times \text{乙} \times \text{丁} \times (\text{甲} + \text{丙}) \times (\text{乙} + \text{丁}) \\
&\quad - 4 \times \text{子}^2 \times \text{乙} \times \text{丁} \times \text{甲} \times \text{丙} \\
&\quad + \text{子}^4 \times (\text{乙} + \text{丁})^2 = 0
\end{aligned}
$$

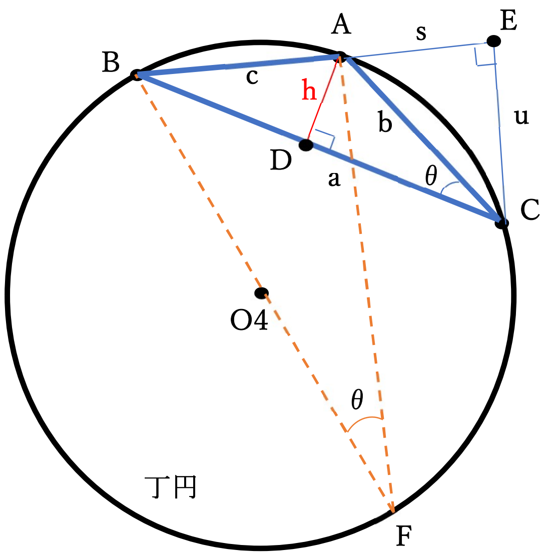
「算法助術（さんぽうじょじゅつ）」　第７２　から作成



（解答）

甲円、乙円、丙円、丁円の中心をおのおの O_1、O_2、O_3、O_4 とし、その直径をおのおの d1,d2,d3,d4 とする。また、円 O_2 と円 O_4 の接点を A、円 O_1 と円 O_4 の接点を B, 円 O_4 と円 O_3 の接点を C とする。さらに、線分(BC)の長さを a、線分(AC)の長さを b 、線分(AB)の長さを c とする。

ここで、三角形 ABC について考える。図が多少煩雑になるので、下図に丁円部のみの詳細を示す。



左図において、3 平方の定理より、

$$(a)^2 = (c+s)^2 + (u)^2 \qquad \cdots \quad (1)$$

$$(b)^2 = (s)^2 + (u)^2 \qquad \cdots \quad (2)$$

という関係がある。

（２）式を（１）式に代入する。

$$(a)^2 = (c+s)^2 + \{(b)^2 - (s)^2\}$$

$$= b^2 + c^2 + 2cs$$

$$\therefore s = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2c} \qquad \cdots \quad (3)$$

次に s と丁円の直径d_4との関連を調べる。

左図において、$\angle BFA$と$\angle BCA$は、円周角の性質から等しい、これを角度 θ とする。三角形 ABC の高さを h とすると、

$$h = b\sin\theta$$
$$= b\left(\frac{c}{d_4}\right)$$
$$= \frac{bc}{d_4}$$

となる。次に、$\Delta ABD \backsim \Delta EBC$であるから、

$$\frac{h}{c} = \frac{u}{a} \qquad \therefore\ u = \frac{a}{c}h = \left(\frac{a}{c}\right)\left(\frac{bc}{d_4}\right) = \frac{ab}{d_4} \qquad \cdots\ (4)$$

となる。次に、三角形 ACE に注目する。3 平方の定理より、

$$s^2 = b^2 - u^2$$
$$= b^2 - \left(\frac{ab}{d_4}\right)^2 \qquad \cdots\ (5)$$

を得る。$\{(3)式\}^2 = (5)式$より、

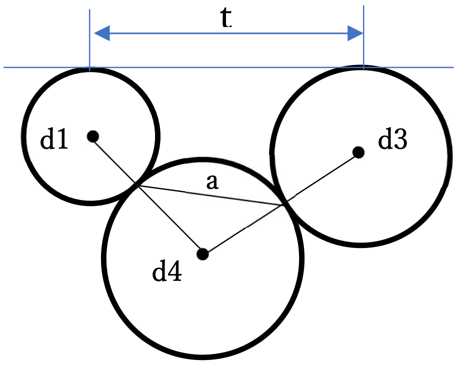
$$s^2 = \left(\frac{a^2 - b^2 - c^2}{2c}\right)^2 = b^2 - \left(\frac{ab}{d_4}\right)^2$$

従って、上式より、

$$(a^2 - b^2 - c^2)^2 = 4b^2c^2 - \frac{4a^2b^2c^2}{{d_4}^2} \qquad \dots\ (6)$$

となる。

　次に、a, b, cと各円の大きさとの関係を求める。



3 円傍斜術より、甲、丙、丁円に対しては、

$$a^2 = \frac{{d_4}^2 t^2}{(d_4 + d_1)(d_4 + d_3)} \qquad \cdots (7)$$

となる。同様に、辺の長さ b と c に対しては、次式で与えられる。

$$b^2 = \frac{{d_4}^2 (d_2 d_3)}{(d_4 + d_2)(d_4 + d_3)} \qquad \cdots (8)$$

$$c^2 = \frac{{d_4}^2 (d_1 d_2)}{(d_4 + d_1)(d_4 + d_2)} \qquad \cdots (9)$$

となる。（７）、（８）、（９）式を（６）式に代入する。

$$\left\{\frac{{d_4}^2 t^2}{(d_4 + d_1)(d_4 + d_3)} - \frac{{d_4}^2 (d_2 d_3)}{(d_4 + d_2)(d_4 + d_3)} - \frac{{d_4}^2 (d_1 d_2)}{(d_4 + d_1)(d_4 + d_2)}\right\}^2$$
$$= 4\left(\frac{{d_4}^2 (d_2 d_3)}{(d_4 + d_2)(d_4 + d_3)}\right)\left(\frac{{d_4}^2 (d_1 d_2)}{(d_4 + d_1)(d_4 + d_2)}\right)$$
$$- \frac{4}{{d_4}^2}\left(\frac{{d_4}^2 t^2}{(d_4 + d_1)(d_4 + d_3)}\right)\left(\frac{{d_4}^2 (d_2 d_3)}{(d_4 + d_2)(d_4 + d_3)}\right)\left(\frac{{d_4}^2 (d_1 d_2)}{(d_4 + d_1)(d_4 + d_2)}\right) \quad \cdots (10)$$

(10)式は複雑なので、計算は各項に分けて行う。

(10)式の左辺

$$= {d_4}^4\left\{\frac{t^2(d_2+d_4)-d_2d_3(d_1+d_4)-d_1d_2(d_3+d_4)}{(d_1+d_4)(d_2+d_4)(d_3+d_4)}\right\}^2$$

$$= \frac{{d_4}^4}{(d_1+d_4)^2(d_2+d_4)^2(d_3+d_4)^2}\{t^2(d_2+d_4)-d_1d_2d_3-d_2d_3d_4-d_1d_2d_3-d_1d_2d_4\}^2$$

$$= \frac{{d_4}^4}{(d_1+d_4)^2(d_2+d_4)^2(d_3+d_4)^2}\{t^2(d_2+d_4)-d_2d_4(d_3+d_1)-2d_1d_2d_3\}^2$$

(10)式右辺第 1 項

$$= 4\left(\frac{{d_4}^2(d_2d_3)}{(d_4+d_2)(d_4+d_3)}\right)\left(\frac{{d_4}^2(d_1d_2)}{(d_4+d_1)(d_4+d_2)}\right)$$

$$= 4{d_4}^4d_1{d_2}^2d_3\left\{\frac{1}{(d_1+d_4)(d_2+d_4)^2(d_3+d_4)}\right\}$$

(10)式右辺第 2 項

$$= \frac{4}{{d_4}^2}\left(\frac{{d_4}^2t^2}{(d_4+d_1)(d_4+d_3)}\right)\left(\frac{{d_4}^2(d_2d_3)}{(d_4+d_2)(d_4+d_3)}\right)\left(\frac{{d_4}^2(d_1d_2)}{(d_4+d_1)(d_4+d_2)}\right)$$

$$= \frac{4t^2{d_4}^6d_1{d_2}^2d_3}{{d_4}^2}\cdot\frac{1}{(d_1+d_4)^2(d_2+d_4)^2(d_3+d_4)^2}$$

$$= \frac{4t^2d_1{d_2}^2d_3{d_4}^4}{(d_1+d_4)^2(d_2+d_4)^2(d_3+d_4)^2}$$

(10)式の分母を払い、両辺を${d_4}^4$で割る。

$$\{t^2(d_2+d_4)-d_2d_4(d_3+d_1)-2d_1d_2d_3\}^2$$
$$= 4d_1{d_2}^2d_3(d_1+d_4)(d_3+d_4)-4t^2d_1{d_2}^2d_3 \qquad \cdots(11)$$

(11)式の左辺

$$= t^4(d_2+d_4)^2-2t^2(d_2+d_4)\{d_2d_4(d_3+d_1)+2d_1d_2d_3\}+\{d_2d_4(d_3+d_1)+2d_1d_2d_3\}^2$$

$$= t^4(d_2+d_4)^2-2t^2d_2d_4(d_2+d_4)(d_3+d_1)-4t^2d_1d_2d_3(d_2+d_4)+{d_2}^2{d_4}^2(d_3+d_1)^2$$
$$+4d_1{d_2}^2d_3d_4(d_3+d_1)+4{d_1}^2{d_2}^2{d_3}^2 \qquad \cdots(12)$$

(12)式のt^4項の整理

$$= t^4(d_2+d_4)^2 \qquad \cdots(13)$$

(11)式の右辺と(12)式のt^2項の整理

$$= -2t^2d_2d_4(d_2+d_4)(d_3+d_1)-4t^2d_1d_2d_3(d_2+d_4)+4t^2d_1{d_2}^2d_3$$

$= t^2\{-2d_2d_4(d_2+d_4)(d_3+d_1) - 4d_1d_2d_3(d_2+d_4) + 4d_1{d_2}^2d_3\}$
$= t^2\{-2d_2d_4(d_2d_3+d_1d_2+d_3d_4+d_1d_4) - 4d_1{d_2}^2d_3 - 4d_1d_2d_3d_4 + 4d_1{d_2}^2d_3\}$
$= t^2(-2{d_2}^2d_3d_4 - 2d_1{d_2}^2d_4 - 2d_2d_3{d_4}^2 - 2d_1d_2{d_4}^2 - 4d_1d_2d_3d_4)$
$= t^2\{-2d_2d_4(d_2d_3+d_1d_2+d_3d_4+d_1d_4) - 4d_1d_2d_3d_4\}$
$= t^2[-2d_2d_4\{d_3(d_2+d_4)+d_1(d_2+d_4)\} - 4d_1d_2d_3d_4]$
$= t^2\{-2d_2d_4(d_1+d_3)(d_2+d_4) - 4d_1d_2d_3d_4\}$ $\cdots(14)$

t 項の無い項
$= {d_2}^2{d_4}^2(d_3+d_1)^2 + 4d_1{d_2}^2d_3d_4(d_3+d_1) + 4{d_1}^2{d_2}^2{d_3}^2 - 4d_1{d_2}^2d_3(d_1+d_4)(d_3+d_4)$
$= {d_2}^2{d_4}^2({d_3}^2+2d_1d_3+{d_1}^2) + 4d_1{d_2}^2d_3(d_3d_4+d_1d_4+d_1d_3-d_1d_3-d_1d_4-d_3d_4-{d_4}^2)$
$= {d_2}^2({d_3}^2{d_4}^2 + 2d_1d_3{d_4}^2 + {d_1}^2{d_4}^2 - 4d_1d_3{d_4}^2)$
$= {d_2}^2({d_3}^2{d_4}^2 - 2d_1d_3{d_4}^2 + {d_1}^2{d_4}^2)$
$= {d_2}^2{d_4}^2(d_3-d_1)^2$
$= {d_2}^2{d_4}^2(d_1-d_3)^2$ $\cdots$ (15)

(13),(14),(15)式から

$$t^4(d_2+d_4)^2 - 2t^2d_2d_4(d_1+d_3)(d_2+d_4) - 4t^2d_1d_2d_3d_4 + {d_2}^2{d_4}^2(d_1-d_3)^2 = 0$$

を得る。上式の直径を元の円表示に戻すと、

$$(乙+丁)^2子^4 - 2子^2乙\cdot丁(乙+丁)(甲+丙) - 4子^2甲\cdot乙\cdot丙\cdot丁 + 乙^2\cdot丁^2(甲-丙)^2 = 0$$

となる。

以上