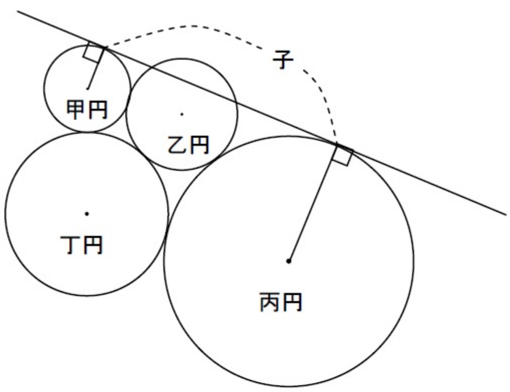
令和５年 10 月の問題-No.2

問題

出題図を図１に示す。



図のように、外接している４個の円があります。
甲円と丙円の共通接線の長さを子とします。
甲円の直径を甲，乙円の直径を乙，丙円の直径を丙，
丁円の直径を丁とします。
このとき、次のように表せることを示して下さい。

$$
\begin{aligned}
&\text{乙}^2\times\text{丁}^2\times(\text{甲}-\text{丙})^2\\
&\quad -2\times\text{子}^2\times\text{乙}\times\text{丁}\times(\text{甲}+\text{丙})\times(\text{乙}+\text{丁})\\
&\quad -4\times\text{子}^2\times\text{乙}\times\text{丁}\times\text{甲}\times\text{丙}\\
&\quad +\text{子}^4\times(\text{乙}+\text{丁})^2=0
\end{aligned}
$$

「算法助術（さんぽうじょじゅつ）」　　第７２　から作成

図１　出題図

解答

甲乙丙丁円の半径をそれぞれ p, q, r, s、中心点をそれぞれ A,B,C,D とし、出題図の子の長さを t とする。円の外接する関係から、各円の中心間距離は図 2 に示す通りとなる。出題図の式は直径で表された関係式であるので、これを半径で置き換えた以下の式

$$\begin{aligned}
&(2q)^2(2s)^2(2p-2r)^2 \\
&-2t^2(2q)(2s)(2p+2r)(2q+2s) \\
&-4t^2(2q)(2s)(2p)(2r) \\
&+t^4(2q+2s)^2 = 0 \qquad (1)
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 64q^2s^2(p-r)^2 - 32t^2qs(p+r)(q+s) - 64t^2pqrs + 4t^4(q+s)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 16q^2s^2(p-r)^2 - 8t^2qs(p+r)(q+s) - 16t^2pqrs + t^4(q+s)^2 = 0 \qquad (2)$$

が成り立つことを示せばよい。

甲丙円中心の高さの差 $|r-p|$ と t から、三平方の定理を用いて、

$$AC^2 = t^2 + (r-p)^2 \qquad (3)$$

が p, r の大小に関わらず成立する。また、$\triangle BCD, \triangle ABD$ に余弦定理を用いて、

$$\cos\angle BDC = \frac{(r+s)^2 + (q+s)^2 - (r+q)^2}{2(r+s)(q+s)} \qquad (4)$$

$$\cos\angle BDA = \frac{(p+s)^2 + (q+s)^2 - (p+q)^2}{2(p+s)(q+s)} \qquad (5)$$

を得る。

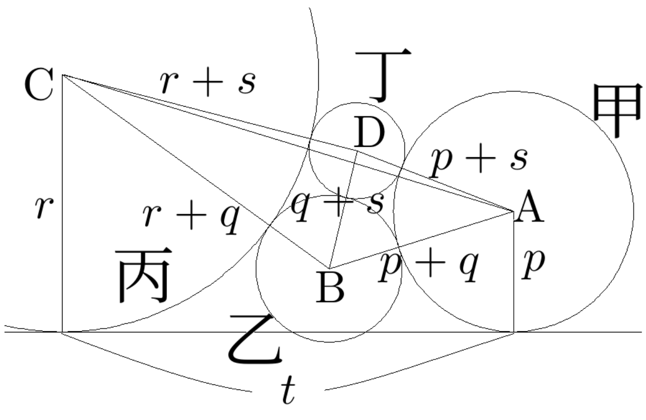


図 2

$\triangle ACD$ に対して余弦定理を用いて、

$$AC^2 = (r+s)^2 + (s+p)^2 - 2(r+s)(s+p)\cos(\angle BDC + \angle BDA) \tag{6}$$

が成立する。ここで、AC^2 を (3) 式で置き換え、余弦の加法定理を用いると

$$t^2 + (r-p)^2 = (r+s)^2 + (s+p)^2 - 2(r+s)(s+p)(c1c2 - s1s2) \tag{7}$$

となる。ただし

$$c1 = \cos\angle BDC \tag{8}$$
$$c2 = \cos\angle BDA \tag{9}$$
$$s1 = \sin\angle BDC \tag{10}$$
$$s2 = \sin\angle BDA \tag{11}$$

である。
(7) 式に (4),(5) 式を代入し、$s1s2$ について解くと

$$s1s2 = \frac{s^2t^2 + 2qst^2 + q^2t^2 - 4qrs^2 - 4pqs^2 - 4q^2rs - 8pqrs - 4pq^2s}{2(s+p)(s+q)^2(s+r)} \tag{12}$$

両辺を自乗して $s1^2, s2^2$ を $1-c1^2, 1-c2^2$ に置き換えると、

$$(1-c1^2)(1-c2^2) = \left(\frac{s^2t^2 + 2qst^2 + q^2t^2 - 4qrs^2 - 4pqs^2 - 4q^2rs - 8pqrs - 4pq^2s}{2(s+p)(s+q)^2(s+r)}\right)^2 \tag{13}$$

となる。この式中の $c1, c2$ を (4),(5) 式で置き換え、右辺の項を左辺に移項し、分母や 0 でない因数を払うと、最終的に以下の式を得る。

$$(s+q)^2t^4 - 8qs(rs+ps+qr+2pr+pq)t^2 + 16q^2(r-p)^2s^2 = 0 \tag{14}$$

(14) 式左辺は式変形すれば (2) 式左辺と一致する。よって (2) 式が成立することが示され、出題図の関係式は確かに成立する。

【補足 1】

$\triangle ACD$ に対して余弦定理を用いる際に、丁円の中心点 D が線分 AC よりも上にある場合を仮定して (6) 式を示したが、図 3 に示すような位置関係の場合も考えられる。しかしこの場合も結局、以下のように同じ式が得られる。

$$\begin{aligned}
AC^2 &= (r+s)^2 + (s+p)^2 - 2(r+s)(s+p)\cos(\angle ADC) \\
&= (r+s)^2 + (s+p)^2 - 2(r+s)(s+p)\cos(2\pi - (\angle BDC + \angle BDA)) \\
&= (r+s)^2 + (s+p)^2 - 2(r+s)(s+p)\cos(\angle BDC + \angle BDA)
\end{aligned}$$

同様に線分 AC 上に点 D がある場合も (6) 式は適用可能である。

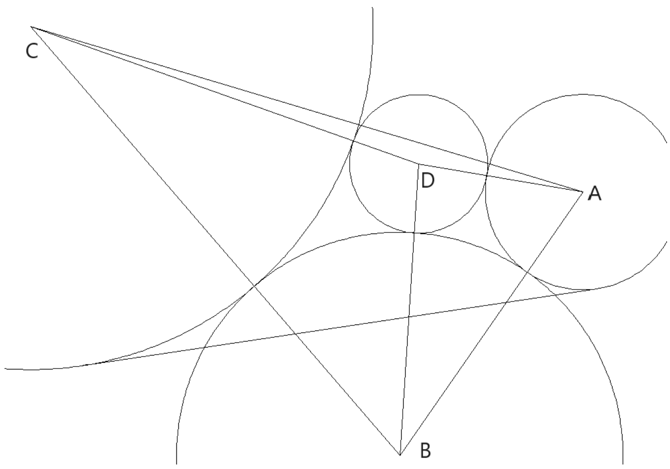


図 3

【補足 2】

(13) 式から (14) 式への式変形を以下に示す。

まず、(13) 式左辺は

$$LHS = \left(1 - \frac{\left((s+q)^2 + (s+p)^2 - (q+p)^2\right)^2}{4(s+p)^2(s+q)^2}\right)\left(1 - \frac{\left((s+r)^2 + (s+q)^2 - (r+q)^2\right)^2}{4(s+q)^2(s+r)^2}\right)$$
$$= \frac{16pq^2rs^2\,(s+q+p)\,(s+r+q)}{(s+p)^2(s+q)^4(s+r)^2}$$

(13) 式右辺は

$$RHS = \frac{\left(s^2t^2 + 2qst^2 + q^2t^2 - 4qrs^2 - 4pqs^2 - 4q^2rs - 8pqrs - 4pq^2s\right)^2}{4(s+p)^2(s+q)^4(s+r)^2}$$

分母を払って以下の式となる。

$$64pq^2rs^2\,(s+q+p)\,(s+r+q) = \left(s^2t^2 + 2qst^2 + q^2t^2 - 4qrs^2 - 4pqs^2 - 4q^2rs - 8pqrs - 4pq^2s\right)^2$$

右辺を左辺に移項して因数分解すると

$$\begin{aligned}-(s+q)^2(s^2t^4 + 2qst^4 + q^2t^4 - 8qrs^2t^2 - 8pqs^2t^2 \\ -8q^2rst^2 - 16pqrst^2 - 8pq^2st^2 \\ +16q^2r^2s^2 - 32pq^2rs^2 + 16p^2q^2s^2) = 0\end{aligned}$$

$-(s+q)^2$ は 0 でないので両辺をこれで割って

$$\begin{aligned}s^2t^4 + 2qst^4 + q^2t^4 - 8qrs^2t^2 - 8pqs^2t^2 \\ -8q^2rst^2 - 16pqrst^2 - 8pq^2st^2 \\ +16q^2r^2s^2 - 32pq^2rs^2 + 16p^2q^2s^2 = 0\end{aligned}$$

左辺を t の多項式としてまとめると (14) 式となる。