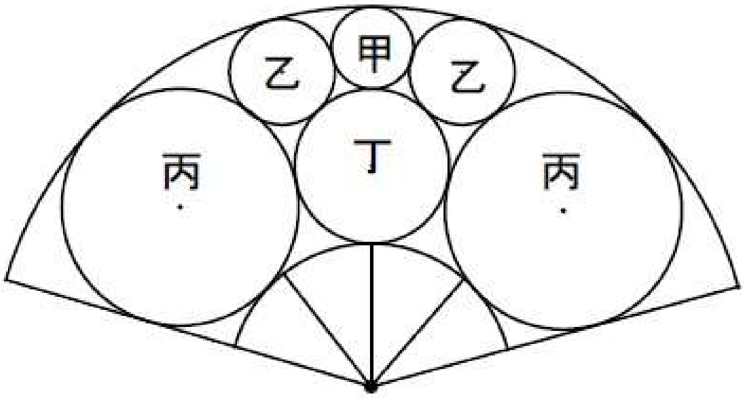
10 月問題 No.3

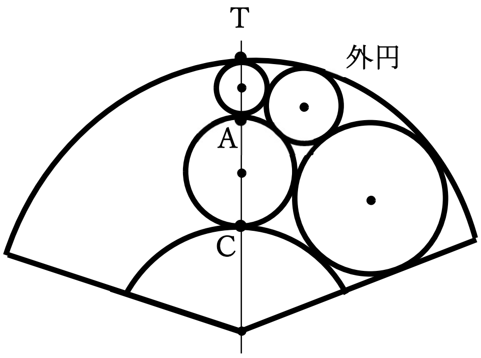


図のように、扇面に６個の円を互いに接して容れてあります。

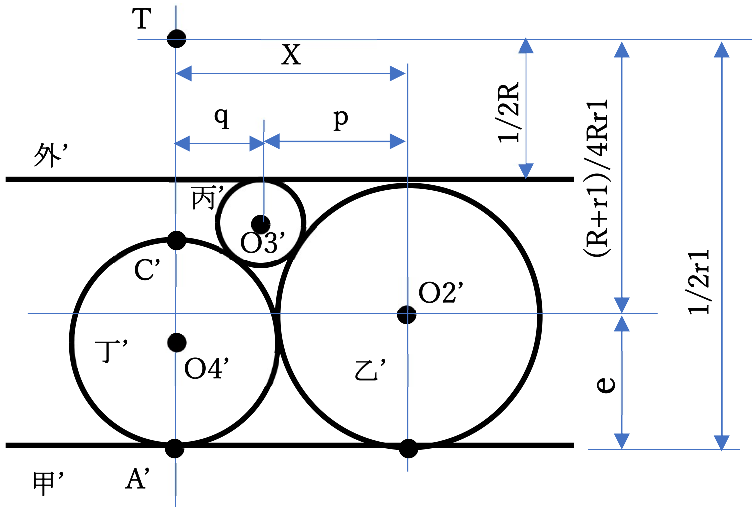
甲円の直径が１寸７分５厘（１．７５寸）、乙円の直径が２寸２分５厘（２．２５寸）のとき、丁円の直径は何寸でしょうか？

（寸を単位にして、少数第２位まで求めて下さい）

「五明算法（ごめいさんぽう）」　第３４問　から作成



元図



反転図（扇の右半分のみ表示）

（解答）

ステップ１（反転図の作成）

扇の外円、甲、乙、丙、丁円の半径をおのおの R,r_1,r_2,r_3,r_4とおく。そして、扇の外円と甲円との接点を中心に反転する。反転半径は k=1 とする。また、甲、乙、丙、丁円の反転像の半径をおのおのr_1',r_2',r_3',r_4'とする。反転中心をＴ、甲円と丁円との接点をＡ、Ｔから鉛直に下した直線と外円との交点（T と反対側）をＢとする。すると、反転の定義より、

$$(TA)\cdot(TA')=k^2=1 \qquad \therefore \quad (TA')=\frac{k^2}{(TA)}=\frac{1}{2r_1}$$

$$(TB)\cdot(TB')=k^2=1 \qquad \therefore \quad (TB')=\frac{k^2}{(TB)}=\frac{1}{2R}$$

となる。また、$e=r_2'$　とおく。e 及び反転中心 T と O_2’中心までの距離は以下の通りとなる。

$$e=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2r_1}-\frac{1}{2R}\right)=\frac{R-r_1}{4Rr_1} \qquad \cdots(1)$$

$$e+\frac{1}{2R}=\frac{R-r_1}{4Rr_1}+\frac{1}{2R}=\frac{R-r_1+2r_1}{4Rr_1}=\frac{R+r_1}{4Rr_1} \qquad \cdots(2)$$

ステップ２（円O_2',O_4'の中心間距離 X を求める）

反転中心 T から円乙$_2$’に引いた接線の長さ（$t_{乙}$）を求める。

$$(t_{乙})^2=\left\{X^2+\left(\frac{R+r_1}{4Rr_1}\right)^2\right\}-e^2$$

$$=X^2+\frac{(R+r_1)^2}{16R^2{r_1}^2}-\frac{(R-r_1)^2}{16R^2{r_1}^2}$$

$$=X^2+\frac{R^2+2Rr_1+{r_1}^2-R^2+2Rr_1-{r_1}^2}{16R^2{r_1}^2}$$

$$=X^2+\frac{4Rr_1}{16R^2{r_1}^2}$$

$$= X^2 + \frac{1}{4Rr_1} \qquad\qquad \cdots(3)$$

となる。次に、乙円の半径は既知であるため、これより（３）式を用いて、Ｘを求める。反転基本式より、乙円 r_2 と反転した r_2'の関係は、次式で与えられる。

$$r_2 = \frac{k^2}{(t_{乙})^2} e \qquad \therefore \; r^2 (t_{乙})^2 = (1)^2 e$$

となるから、上式に（３）式を代入し、

$$r_2\left(X^2 + \frac{1}{4Rr_1}\right) = \frac{R - r_1}{4Rr_1}$$

$$\left(X^2 + \frac{1}{4Rr_1}\right) = \frac{R - r_1}{4Rr_1 r_2}$$

$$X^2 = \frac{R - r_1}{4Rr_1 r_2} - \frac{1}{4Rr_1}$$

$$= \frac{R - r_1 - r_2}{4Rr_1 r_2} \qquad\qquad \cdots(3)$$

を得る。

ステップ３（反転像各円の円径比を求める）

3.1)　$r_4{}'$を求める

反転図において、線分Ｘの長さは次式で求められる。

$$\mathrm{X} = 2\sqrt{r_2{}' \cdot r_4{}'} = 2\sqrt{e \cdot r_4{}'}$$

上式に(3) 式を適用すると、

$$\frac{R - r_1 - r_2}{4Rr_1 r_2} = 4er_4{}'$$

$$r_4{}' = \frac{R - r_1 - r_2}{16Rr_1 r_2} \cdot \frac{1}{e}$$

$$r_4{}' = \frac{R - r_1 - r_2}{16Rr_1 r_2} \cdot \frac{4Rr_1}{R - r_1}$$

$$= \frac{R - r_1 - r_2}{4r_2(R - r_1)} \qquad\qquad \ldots(4)$$

となる。

3.2)r_3'求める

反転図において、$X = p + q$であるから、

$$p + q = \sqrt{(r_3{}' + r_4{}')^2 - (2e - r_3{}' - r_4{}')^2} + 2\sqrt{r_2{}' r_3{}'}$$
$$= \sqrt{(r_3{}' + r_4{}')^2 - 4e^2 + 4e(r_3{}' + r_4{}') - (r_3{}' + r_4{}')^2} + 2\sqrt{er_3{}'}$$
$$= 2\sqrt{e}\left(\sqrt{r_3{}' + r_4{}' - e} + \sqrt{r_3{}'}\right)$$

$X = 2\sqrt{er_4{}'}$より、

$$2\sqrt{er_4{}'} = 2\sqrt{e}\left(\sqrt{r_3{}' + r_4{}' - e} + \sqrt{r_3{}'}\right)$$

$$\sqrt{r_4'} = \sqrt{r_3' + r_4' - e} + \sqrt{r_3'}$$
$$\sqrt{r_4'} - \sqrt{r_3'} = \sqrt{r_3' + r_4' - e}$$

　両辺を平方する。

$$r_4' + r_3' - 2\sqrt{r_3' r_4'} = r_3' + r_4' - e$$
$$2\sqrt{r_3' r_4'} = e$$
$$4 r_3' r_4' = e^2$$

∴

$$r_3' = \frac{e^2}{4r_4'} \qquad \cdots (5)$$

ステップ４（r_4を求める）

　反転中心Ｔから丁’円に引いた接線の長さ（$t_{丁}$）を求める。

$$(t_{丁})^2 = \left(\frac{1}{2r_1} - r_4'\right)^2 - (r_4')^2$$
$$= \frac{1}{4{r_1}^2} - \frac{r_4'}{r_1} + (r_4')^2 - (r_4')^2$$
$$= \frac{1}{4{r_1}^2} - \frac{r_4'}{r_1}$$
$$= \frac{1 - 4r_1 r_4'}{4{r_1}^2}$$

反転基本式より、

$$r_4 = \frac{k^2}{(t_{丁})^2} r_4'$$
$$= \frac{4{r_1}^2 (1)^2}{1 - 4r_1 r_4'} r_4'$$

となる。計算を分子と分母に分けて行う。

$$分子 = 4{r_1}^2 r_4{}^{\prime}$$
$$= 4{r_1}^2 \cdot \frac{R - r_1 - r_2}{4r_2(R - r_1)}$$
$$= \frac{{r_1}^2 (R - r_1 - r_2)}{r_2(R - r_1)}$$

$$分母 = 1 - 4r_1 r_4'$$
$$= 1 - 4r_1 \left\{\frac{R - r_1 - r_2}{4r_2(R - r_1)}\right\}$$
$$= \frac{r_2(R - r_1) - r_1(R - r_1 - r_2)}{r_2(R - r_1)}$$
$$= \frac{{r_1}^2 + R(r_2 - r_1)}{r_2(R - r_1)}$$

従って、

$$r_4 = \frac{{r_1}^2(R - r_1 - r_2)}{r_2(R - r_1)} \cdot \frac{r_2(R - r_1)}{{r_1}^2 + R(r_2 - r_1)}$$

$$= \frac{{r_1}^2(R - r_1 - r_2)}{{r_1}^2 + R(r_2 - r_1)} \qquad \cdots (6)$$

となる。

<u>ステップ５（反転中心Ｔから丙'円に引いた接線の長さ（t 丙）を求める）</u>

$$(\text{t 丙})^2 = \left\{q^2 + \left(\frac{1}{2R} + {r_3}'\right)^2\right\} - ({r_3}')^2$$

$$= \left\{\left(2\sqrt{{r_2}' \cdot {r_4}'} - 2\sqrt{{r_2}' \cdot {r_3}'}\right)^2 + \left\{\frac{1}{4R^2} + \frac{{r_2}'}{R} + ({r_3}')^2\right\}\right\} - ({r_3}')^2$$

$$= 4{r_2}' \cdot {r_4}' + 4{r_2}' \cdot {r_3}' - 8{r_2}'\sqrt{{r_3}' \cdot {r_4}'} + \frac{1}{4R^2} + \frac{{r_2}'}{R}$$

$$= 4e{r_4}' + 4e{r_3}' - 8e\sqrt{{r_3}' \cdot {r_4}'} + \frac{1 + 4Re}{4R^2}$$

$$= 4e\left(\sqrt{{r_4}'} - \sqrt{{r_3}'}\right)^2 + \frac{1 + 4Re}{4R^2} \qquad \cdots (7)$$

を得る。

<u>ステップ６（丙円半径r_3, r_4を求める）</u>

反転基本式より、丙円半径r_3は、次式で与えられる。

$$r_3 = \frac{k^2}{(\text{t 丙})^2} \cdot {r_3}'$$

また、この問題の場合、$r_3 = r_1 + r_4$の関係があるから、

$$r_4 = \frac{k^2}{(\text{t 丙})^2} \cdot {r_3}' - r_1 \qquad \cdots (8)$$

となる。

ステップ７（数値計算）

(6),(8)式から扇の外円径と丁円径を解くことになるが、計算式が複雑すぎるので、ここではExcel のゴール・シーク機能を用いて計算する。以下その結果を示す。

既知データ		計算結果	
乙円半径(r1)	甲円半径(r2)	外円半径(R)	丁円直径
0.875	1.125	7.875	3.29

計算データ

r3'(反転丙円半径)	e	r4'(反転丁円半径)	(ｔ丙)^2
0.086	0.254	0.187	0.034

r3(丙円半径)
2.52

r4(第1式)	r4(第2式)	偏差
1.645	1.645	-0.0000003

以上より、丁円の直径は 3.29 寸である。

（答　丁円直径　3.29 寸）