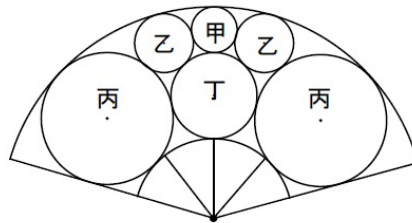


令和5年10月の問題-No.3

問題

出題図を図1に示す。



図のように、扇面に6個の円を互いに接して容れてあります。

甲円の直径が1寸7分5厘(1.75寸)、乙円の直径が2寸2分5厘(2.25寸)のとき、丁円の直径は何寸でしょうか？

(寸を単位にして、少数第2位まで求めて下さい)

「五明算法(ごめいさんぼう)」 第34問 から作成

図1 出題図

解答

甲円半径を1と正規化して、図の対称性より、図2のように右半分のみを考えればよい。甲乙丙丁円、扇形の内側の円弧(内とする)の半径をそれぞれ r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 とすると、正規化した状態では $r_1 = 1, r_2 = \frac{9}{7}$ である。扇形の中心を座標原点に取っているので、内円弧の中心は $(0, 0)$ である。また、出題図の関係から、甲円の中心は $(0, r_5 + 2r_4 + r_1)$ 、丁円の中心は $(0, r_5 + r_4)$ となる。

乙円の中心を (a_2, b_2) 、丙円の中心を (a_3, b_3) とすれば、円および円弧の接する関係から以下の式が成立する。

$$(a_2 - 0)^2 + (b_2 - (r_5 + 2r_4 + r_1))^2 = (r_1 + r_2)^2 \quad (1)$$

$$(a_2 - a_3)^2 + (b_2 - b_3)^2 = (r_2 + r_3)^2 \quad (2)$$

$$(a_2 - 0)^2 + (b_2 - (r_5 + r_4))^2 = (r_2 + r_4)^2 \quad (3)$$

$$(a_2 - 0)^2 + (b_2 - 0)^2 = (r_5 + 2(r_4 + r_1) - r_2)^2 \quad (4)$$

$$(a_3 - 0)^2 + (b_3 - (r_5 + r_4))^2 = (r_3 + r_4)^2 \quad (5)$$

$$(a_3 - 0)^2 + (b_3 - 0)^2 = (r_5 + 2(r_4 + r_1) - r_3)^2 \quad (6)$$

$$r_3 = r_1 + r_2 \quad (7)$$

これらの7式を満たす $r_3, r_4, r_5, a_2, b_2, a_3, b_3$ を求めれば、出題図の関係を満たすものとして以下の解を得る。

$$a_2 = \frac{9\sqrt{47}}{28} \quad (8)$$

$$b_2 = \frac{207}{28} \quad (9)$$

$$a_3 = \frac{27\sqrt{47}}{40} \quad (10)$$

$$b_3 = \frac{\sqrt{801}}{200} \quad (11)$$

$$r_3 = \frac{72}{25} \quad (12)$$

$$r_4 = \frac{47}{25} \quad (13)$$

$$r_5 = \frac{81}{25} \quad (14)$$

出題図の甲円半径は $1.75/2=0.875$ 寸なので、丁円の直径は、 $0.875 * 2 * r_4 = 0.875 * 2 * \frac{47}{25} = 3.29$ 寸となる。

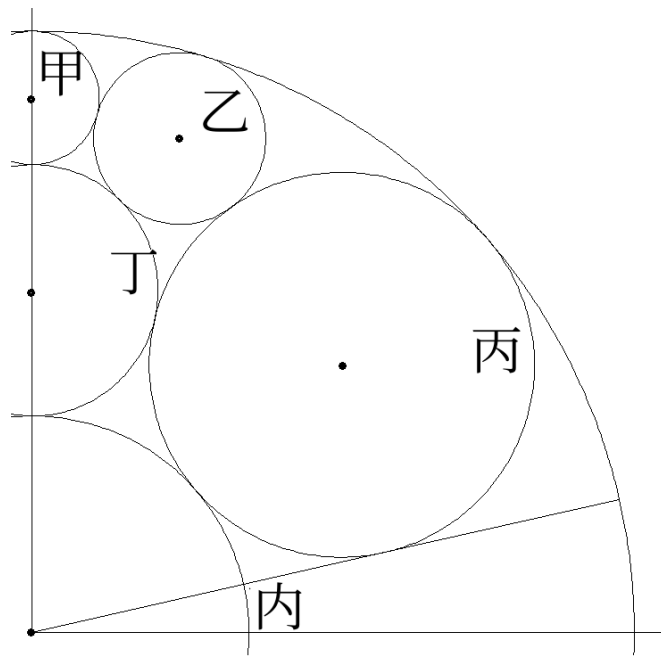


图 2