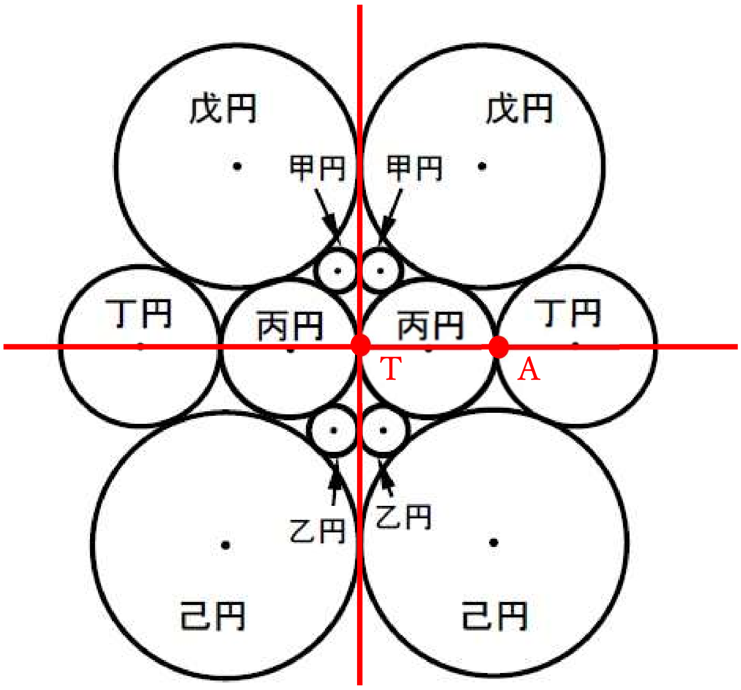
11 月問題 No.1



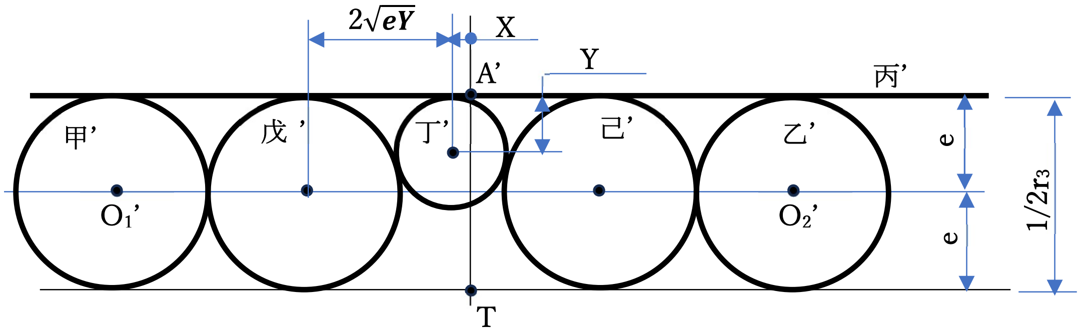
図のように、互いに接する１２個の円があります。
同じ名前の円は、２つの甲円の接点と２つの乙円の接点を通る直線を線対称の軸として、対称な位置に有ります。

甲円の直径が４３寸７分５厘（４３．７５寸），乙円の直径が５１寸零３厘（５１．０３寸），丙円の直径が１百４１寸７分５厘（１４１．７５寸）のとき、
丁円の直径は、何寸でしょうか？（寸を単位として少数第２位まで求めて下さい。）

「神壁算法（じんぺきさんぽう）」　第３２問　から作成

（解答）

甲円、乙円、丙円の半径をおのおの r_1、r_2、r_3 とする。そして、丙円と丙円の接点を中心に反転する。下図にその反転図を示す（反転図は反時計方向に 90 度回転し、左右対称のため右半分のみを示す)。



反転円の半径は k = 1 とする。すると、反転の定義より、

$$(TA)(TA') = k^2 = 1 \qquad \therefore \quad (TA') = \frac{k^2}{(TA)} = \frac{1}{2r_3}$$

となる。そして、反転像丁'円の中心から点 A へのズレを図に示すように X、Y とおき、反転像甲'円、乙'円、戊'円、己'円の半径を e とおく。すると、

$$e = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2r_3}\right) = \frac{1}{4r_3}$$

となる。

ステップ１（X,Y を求める）

反転図における反転中心 T から甲'円に引いた接線の長さ（t_1）および乙'円に引いた接線の長さ（t_2）を求める。

$$(t_1) = X + 2\sqrt{e \cdot Y} + 2e \qquad \cdots(1)$$

$$(t_2) = 2\sqrt{e \cdot Y} - X + 2e \qquad \cdots(2)$$

次に、反転前後の半径の関係は、反転基本式より下式で与えられる。

$$r_1 = \frac{k^2}{(t_1)^2} \cdot e \qquad \cdots(3)$$

$$r_2 = \frac{k^2}{(t_2)^2} \cdot e \qquad \cdots(4)$$

そして、反転図を参照すると、次の関係があることが分かる。

$$t_1 - X = t_2 + X$$

上式より、

$$X = \tfrac{1}{2}(t_1 - t_2)$$

となる。上式に(3)、(4)式を代入する。

$$X = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{\tfrac{e}{r_1}} - \sqrt{\tfrac{e}{r_2}}\right) \qquad \cdots(5)$$

(5)式を（1）式に代入し、$\sqrt{Y}$を求める。

$$2\sqrt{eY} = t_1 - X - 2e$$

よって、

$$\sqrt{Y} = \tfrac{1}{2\sqrt{e}}(t_1 - X - 2e)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{e}}\left\{\sqrt{\frac{e}{r_1}} - \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{e}{r_1}} - \sqrt{\frac{e}{r_2}}\right) - 2e\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\sqrt{r_1}} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{r_1}} - \frac{1}{\sqrt{r_2}}\right) - 2\sqrt{e}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{r_1}} - \frac{1}{2\sqrt{r_1}} + \frac{1}{2\sqrt{r_2}} - 2\sqrt{e}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\sqrt{r_1}} + \frac{1}{2\sqrt{r_2}} - 2\sqrt{e}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} - 4\sqrt{e}\right) \qquad \cdots(6)$$

となる。

ステップ２（丁'円への接線の長さ（ｔ$_x$）を求める）

反転中心Ｔから丁'円に引いた接線の長さ（t_x）を求める。反転図を参照し、

$$(t_x)^2 = \{X^2 + (2e - Y)^2\} - Y^2 \qquad \cdots(7)$$

を得る。

ステップ３（丁円径を求める）

反転基本式より、反転前後の丁円の径の関係は下式で与えられる。

$$x = \tfrac{k^2}{(t_x)^2} \cdot Y \qquad \cdots(8)$$

(8)式を構成する各項を個別に計算する。問題の題意より、

$$r_1 = \tfrac{43.75}{2}, \quad r_2 = \tfrac{51.03}{2}, \quad r_3 = \tfrac{141.75}{2}$$

であるから、

（６）式より、

$$\sqrt{Y}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{r_1}}+\frac{1}{\sqrt{r_2}}-4\sqrt{e}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{2}{43.75}}+\sqrt{\frac{2}{51.03}}-4\sqrt{\frac{2}{4\cdot 141.75}}\right)$$

両辺を平方して、

$$Y=\frac{242}{127575} \qquad \ldots(9)$$

次に（7）式より、

$$(t_x)^2=X^2+(2e-Y)^2-Y^2$$
$$=X^2+4e^2-4eY$$

ここで、上式の e、X は、

$$e=\frac{1}{4r_3}=\frac{2}{4\cdot 141.75}=\frac{2}{567}$$

$$X=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{e}{r_1}}-\sqrt{\frac{e}{r_2}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{567}}\left(\sqrt{\frac{2}{43.75}}-\sqrt{\frac{2}{51.03}}\right)$$

$$=\frac{4}{8505}$$

となる。以上より、

$$(t_x)^2=\left(\frac{4}{8505}\right)^2+4\left(\frac{2}{567}\right)^2-4\left(\frac{2}{567}\right)\left(\frac{242}{127575}\right)=\frac{16}{688905} \qquad \cdots(10)$$

となる。(9)、(10)式を(8)式に代入する。

$$x=\frac{688905}{16}\cdot\frac{242}{127575}=81.675$$

従って、丁円の直径は２ｘ＝163.35 寸となる。

（答　丁円直径 163.35 寸）