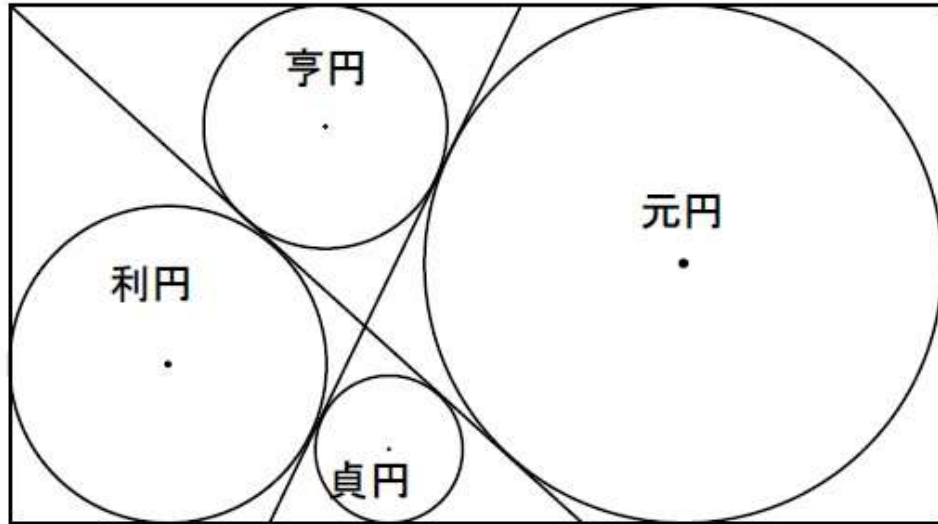
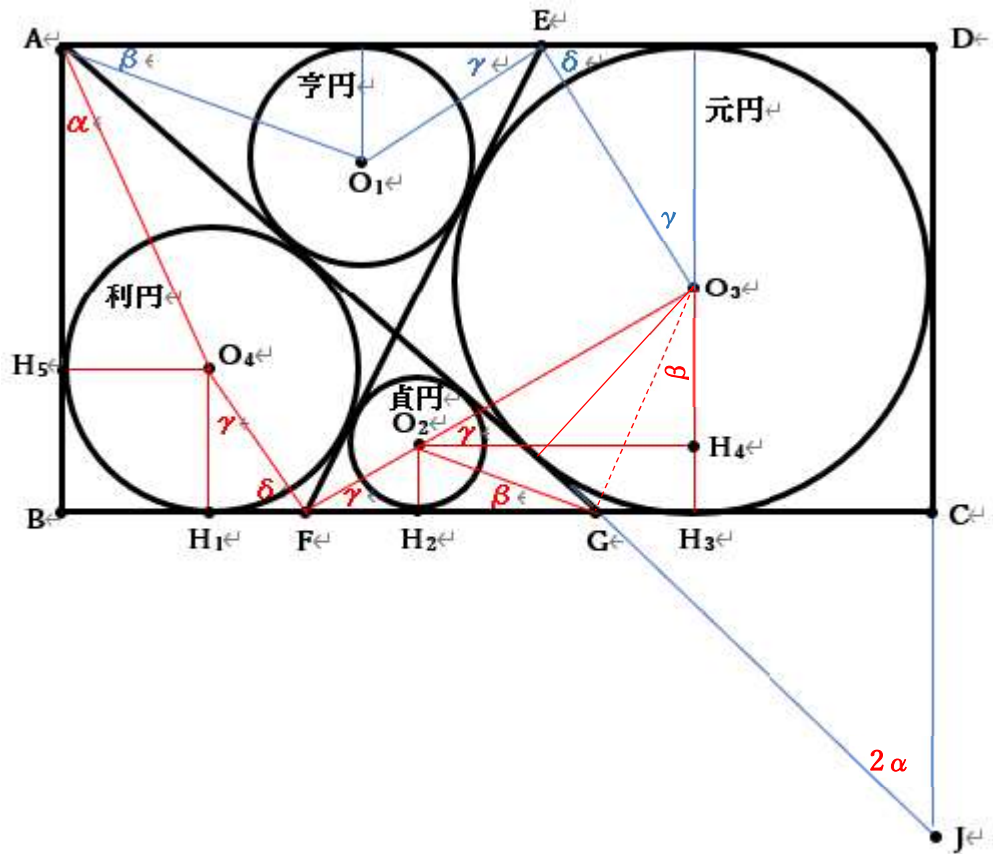


11月問題 No.2



図のように、長方形の中を2本の線分で区分して、元円，亨円，利円，貞円を容れます。(1本の線分は長方形の頂点の一つを通っています。)

亨円の直径が44寸，貞円の直径が33寸のとき、利円の直径は、何寸でしょうか？。



(解答)

亨円、貞円、元円、利円の半径をおのおの $r_1, r_2, r_3, x$ とおく。また、以下の角度を次のようにおく。

$$\angle AH_5O_4 = \alpha, \quad \angle O_2GH_2 = \beta, \quad \angle O_2FH_2 = \gamma, \quad \angle H_1FO_4 = \delta$$

すると、

$$\angle H_1O_4F = \frac{\pi}{2} - \delta = \gamma$$

となる。次に、各線分の長さや角度の関係は、次の通り。

$$\tan \alpha = \frac{H_5O_4}{AH_5} = \frac{x}{2r_3 - x} \quad \dots (1)$$

$$\begin{aligned} \tan 2\alpha &= \frac{2 \tan \alpha}{1 - (\tan \alpha)^2} \\ &= \frac{2x}{2r_3 - x} \cdot \frac{(2r_3 - x)^2}{4r_3(r_3 - x)} \\ &= \frac{2x(2r_3 - x)}{4r_3(r_3 - x)} \quad \dots (2) \end{aligned}$$

また、相似比から、

$$\frac{x}{(BG)} = \frac{r_3}{(AD)}$$

$$\therefore (AD) = \frac{r_3}{x} (BG)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{r_3}{x} (2r_3) \tan 2\alpha \\
&= \frac{r_3}{x} (2r_3) \frac{2x(2r_3 - x)}{4r_3(r_3 - x)} \\
&= \frac{r_3(2r_3 - x)}{r_3 - x} \quad \dots (3)
\end{aligned}$$

を得る。

次に、 $\tan \beta$ 、 $\tan \gamma$ と各線分の長さとの関係を求める。図より、

$$\tan \beta = \frac{(GH_3)}{r_3}, \quad \tan \gamma = \frac{(O_3H_4)}{(O_2H_4)} = \frac{(O_3H_4)}{(H_2H_3)}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}
(GC) &= (BC) - (BG) \\
&= (AD) - (BG) \\
&= \frac{r_3(2r_3 - x)}{r_3 - x} - 2r_3 \tan 2\alpha \\
&= \frac{r_3(2r_3 - x)}{r_3 - x} - 2r_3 \frac{2x(2r_3 - x)}{4r_3(r_3 - x)} \\
&= \frac{2r_3^2 - r_3x - 2xr_3 + x^2}{r_3 - x} \\
&= \frac{2r_3(r_3 - x) - x(r_3 - x)}{r_3 - x} \\
&= 2r_3 - x
\end{aligned}$$

よって、

$$(GH_3) = (GC) - r_3 = r_3 - x$$

となるから、

$$\tan \beta = \frac{r_3 - x}{r_3} \quad \dots (4)$$

また、

$$\begin{aligned}
(H_3H_2) &= (H_2G) + (GH_3) \\
&= \frac{r_2}{\tan \beta} + [(GC) - r_3] \\
&= \frac{r_2 r_3}{r_3 - x} + (r_3 - x) \\
&= \frac{r_2 r_3 + (r_3 - x)^2}{r_3 - x}
\end{aligned}$$

を得る。以上より、

$$\tan \gamma = \frac{(r_3 - r_2)(r_3 - x)}{r_2 r_3 + (r_3 - x)^2} \quad \dots (5)$$

を得る。

以上より、

$$\begin{aligned} (AD) &= (AE) + (ED) \\ &= \frac{r_1}{\tan \beta} + \frac{r_1}{\tan \gamma} + r_3 \tan \gamma + r_3 \\ &= \frac{r_1 r_3}{r_3 - x} + \frac{r_1 (r_2 r_3 + (r_3 - x)^2)}{(r_3 - r_2)(r_3 - x)} + \frac{(r_3 - r_2)(r_3 - x)}{r_2 r_3 + (r_3 - x)^2} r_3 + r_3 \dots (6) \end{aligned}$$

また、相似比の関係から、

$$\frac{r_3}{x} = \frac{r_1}{r_2} \quad \therefore r_3 = \frac{r_1}{r_2} x \quad \dots (7)$$

となる。(3)式、(7)式を(6)式に代入し、利円の径(x)を求める。しかし、計算が非常に煩雑なため、EXCELのゴール・シーク機能を使って計算する。その結果を以下に示す。

11月問題No.2						
亨円半径	貞円半径	利円半径	利円直径	元円直径		
22	16.5	31.5	63	84		
左辺	右辺				右辺合計	左辺-右辺
	1項目	2項目	3項目	4項目		偏差
210	88	66	14	42	210	2.42E-10

上記より、利円の直径は63寸となる。

(答 利円の直径63寸)