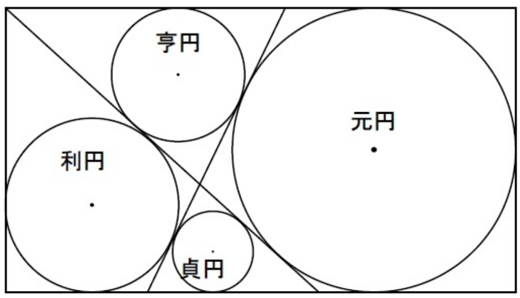
令和５年 11 月の問題-No.2

問題

出題図を図１に示す。



図のように、長方形の中を２本の線分で区分して、元円，亨円，利円，貞円を容れます。（１本の線分は長方形の頂点の一つを通っています。）

亨円の直径が４４寸，貞円の直径が３３寸のとき、利円の直径は、何寸でしょうか？。

「神壁算法（じんぺきさんぽう）」　第３４問　から作成

図１　出題図

解答

図 2 のように補助線を引いた図を考える。$\angle JBA = \angle JBC = \alpha, \angle JAB = \angle JAC = \beta, \angle FDC = \angle FDK = \theta$ とする。

まず、元円径は利円径の $\frac{4}{3}$ 倍であることを示す。錯角の関係より $\angle CBA = \angle CDE, \angle CAB = \angle CED$ であるため、2 角が等しいので $\triangle ABC \backsim \triangle EDC$ である。内接円はそれぞれ貞円と亨円となるため、辺 AC と辺 EC との比はそれらの円の比となる。よって $EC = \frac{4}{3}AC$ となる。次に、錯角の関係より $\angle GAC = \angle IEC$ であり、それらの二等分角であるため $\angle FAC = \angle HEC$ である。また、対頂角のため $\angle FCA = \angle HCE$ であり、2 角が等しいので $\triangle ACF \backsim \triangle ECH$ となる。ここで辺 AF と辺 EH との比は、辺 AC と辺 EC との比と等しいので、$EH = \frac{4}{3}AF$ となる。最後に、$\angle FAG = \angle HEI$、$\angle FGA = \angle HIE = 90°$ であり、2 角が等しいため,$\triangle AFG \backsim \triangle EHI$ である。$EH = \frac{4}{3}AF$ であるので、他の対応する辺の比も等しくなるため、$HI = \frac{4}{3}FG$ となる。これは元円半径が利円半径の $\frac{4}{3}$ 倍になることを示している。よって、元円径も利円径の $\frac{4}{3}$ 倍となる。

元円径が利円径の $\frac{4}{3}$ 倍であることから θ の三角関数値を求める。利円半径を r とすると、元円半径は $\frac{4}{3}r$ であり、元円径は $\frac{8}{3}r$ である。よって $DK = \frac{8}{3}r$ である。これより、θ の三角関数値を求めると以下のようになる。

$$\tan\theta = \frac{LF}{DL} = \frac{r}{\frac{8}{3}r - r} = \frac{3}{5} \tag{1}$$

$$\sin\theta = \frac{3}{\sqrt{34}} \tag{2}$$

$$\cos\theta = \frac{5}{\sqrt{34}} \tag{3}$$

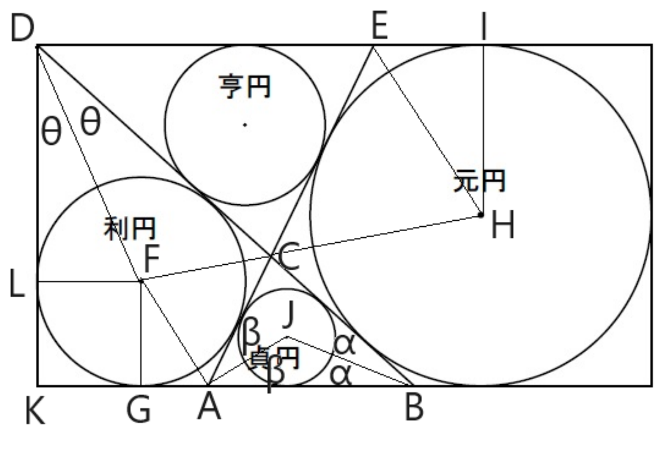


図 2

θ の三角関数値が得られたので、α の三角関数値を求める。$2\theta+2\alpha=\frac{\pi}{2}$ であるので、$\alpha=\frac{\pi}{4}-\theta$ である。よって α の三角関数値を求めると以下の値になる。

$$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{17}} \tag{4}$$
$$\cos\alpha=\frac{4}{\sqrt{17}} \tag{5}$$
$$\tan\alpha=\frac{1}{4} \tag{6}$$

$\tan\beta=t$ として、線分の長さを求めていく。$\angle ACB=180^\circ\ -2\alpha-2\beta$ であるので、貞円半径 $\frac{33}{2}$ を用いて、以下の値を得る。ここで、$\alpha=\arccos(\frac{4}{\sqrt{17}})=14.0362434\cdots^\circ$ なので、β の範囲は $0^\circ\ <\beta<75.963756\cdots^\circ$ となり、$0<t<4$ である。

$$AB=\frac{\frac{33}{2}}{\tan\alpha}+\frac{\frac{33}{2}}{\tan\beta}=\frac{\frac{33}{2}}{\frac{1}{4}}+\frac{\frac{33}{2}}{t}=66+\frac{33}{2t} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}AC&=\frac{\frac{33}{2}}{\tan\beta}+\frac{\frac{33}{2}}{\tan(\frac{\pi}{2}-\alpha-\beta)}=\frac{\frac{33}{2}}{t}+\frac{33}{2}\tan(\alpha+\beta)=\frac{\frac{33}{2}}{t}+\frac{33}{2}\frac{\frac{1}{4}+t}{1-\frac{1}{4}t}\\&=\frac{33}{2t}+\frac{33}{2}(\frac{1+4t}{4-t})\end{aligned} \tag{8}$$

$$BC=\frac{\frac{33}{2}}{\tan\alpha}+\frac{\frac{33}{2}}{\tan(\frac{\pi}{2}-\alpha-\beta)}=66+\frac{33}{2}(\frac{1+4t}{4-t}) \tag{9}$$

$$ED=\frac{4}{3}AB=\frac{4}{3}(66+\frac{33}{2t})=88+\frac{22}{t} \tag{10}$$

$$EC=\frac{4}{3}AC=\frac{4}{3}(\frac{33}{2t}+\frac{33}{2}(\frac{1+4t}{4-t}))=\frac{22}{t}+22(\frac{1+4t}{4-t}) \tag{11}$$

$$DC=\frac{4}{3}BC=\frac{4}{3}(66+\frac{33}{2}(\frac{1+4t}{4-t}))=88+22(\frac{1+4t}{4-t}) \tag{12}$$

$$\begin{aligned}DK&=(BC+DC)\sin2\alpha\\&=(66+\frac{33}{2}(\frac{1+4t}{4-t})+88+22(\frac{1+4t}{4-t}))2\sin\alpha\cos\alpha\\&=(154+\frac{77}{2}(\frac{1+4t}{4-t}))2\frac{1}{\sqrt{17}}\frac{4}{\sqrt{17}}\\&=\frac{8}{17}(154+\frac{77}{2}(\frac{1+4t}{4-t}))\\&=\frac{4}{17}(308+77(\frac{1+4t}{4-t}))\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}AK&=ED-\sqrt{AE^2-DK^2}\\&=ED-\sqrt{(AC+EC)^2-DK^2}\\&=88+\frac{22}{t}-\sqrt{(\frac{33}{2t}+\frac{33}{2}(\frac{1+4t}{4-t})+\frac{22}{t}+22(\frac{1+4t}{4-t}))^2-(\frac{4}{17}(308+77(\frac{1+4t}{4-t})))^2}\\&=88+\frac{22}{t}-\sqrt{\frac{23716(t-1)^2(t+1)^2}{(t-4)^2t^2}}\\&=88+\frac{22}{t}-154\frac{1+t}{t}\frac{|t-1|}{4-t}\end{aligned} \tag{14}$$

利円が四角形 ACDK に内接するので、円が内接する四角形の性質より AC+DK=AK+DC が成立する。つまり、以下の式が成立する。

$$\frac{33}{2t}+\frac{33}{2}(\frac{1+4t}{4-t})+\frac{4}{17}(308+77(\frac{1+4t}{4-t}))=88+\frac{22}{t}-154\frac{1+t}{t}\frac{|t-1|}{4-t}+88+22(\frac{1+4t}{4-t})$$

この式を満たす $t(0<t<4)$ を求めると、題意に適する解として $t=\frac{1}{3}$ を得る。このとき、$AC=60, DC=102, DK=84, AK=42$ 寸となり、$AD=\sqrt{8820}$ 寸であるので、ヘロンの公式を $\triangle ACD, \triangle ADK$ に適用して四角形 ACDK の面積を求めれば、4536 平方寸となる。これから利円の半径 r を求めれば、$\frac{1}{2}r(60+102+84+42)=4536$ を解いて $r=\frac{63}{2}$ 寸を得る。よって利円径は 63 寸となる。作図結果を図 3 に示す。

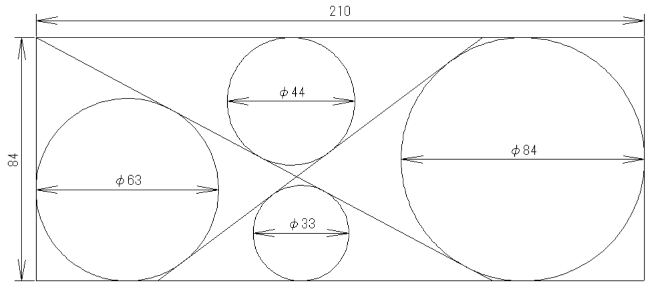


図 3