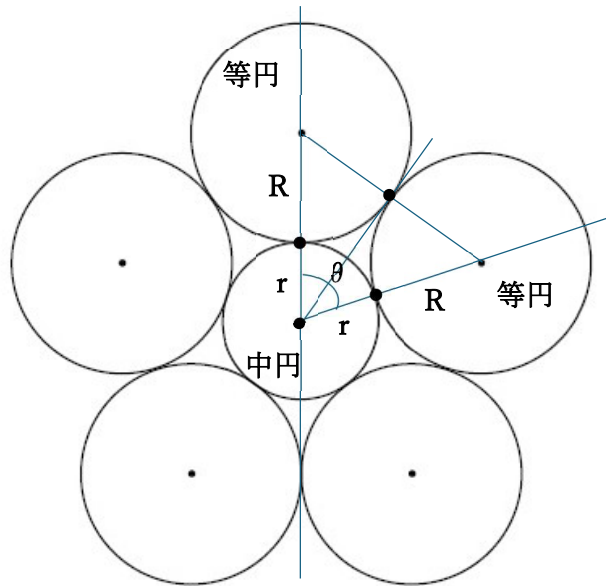


図のように、中円のまわりに、等円5個があります。  
中円の直径が、17、55寸のとき、等円の直径は何寸  
でしょうか？

福德神社 新算額2 第2問 から作成

(埼玉の算額87 加須市大越 天神社 第1問)

## 2月問題2



(解答)

中円、等円の半径をおのおの  $r$ 、 $R$  とする。そして、上図2個の等円に対し余弦定理を適用する。

$$\begin{aligned}(2R)^2 &= 2(R+r)^2 - 2(R+r)^2 \cos \theta \\ &= 2(R+r)^2(1 - \cos 72^\circ)\end{aligned}$$

ここで、 $K=(1 - \cos 72^\circ)$ とおく。すると、

$$\begin{aligned}4R^2 &= 2K(R^2 + 2Rr + r^2) \\ (4 - 2K)R^2 - 4KRr - 2Kr^2 &= 0 \\ (2 - K)R^2 - 2KRr - Kr^2 &= 0\end{aligned}$$

上式を  $R$  について解く。

$$R = \frac{1}{2(2-K)} \left\{ 2Kr \pm \sqrt{4K^2r^2 + 4(2-K)Kr^2} \right\}$$

ここで、

$$\text{根号内} = 4K^2r^2 + 8Kr^2 - 4K^2r^2 = 8Kr^2$$

従って、

$$R = \frac{1}{2(2-K)} (2Kr \pm 2r\sqrt{2K}) = \frac{1}{(2-K)} (Kr \pm r\sqrt{2K})$$

$R > 0$  より、

$$R = \frac{r}{(2 - K)} (K + \sqrt{2K})$$

となる。  $K = 1 - \cos 72^\circ$ ,  $r = \frac{17.55}{2}$  より、

$$R = \frac{8.775}{1.309017} (0.690983 + \sqrt{2 * 0.690983}) = 12.512448$$

従って、小円の直径は  $2R = 25.025$  寸となる。

「別解」

前項より、より単純に小円径を求める方法があったので、それを示す。図より、

$$R = (R + r) \sin 36^\circ$$

$$= R(1 - \sin 36^\circ)$$

$$= r \sin 36^\circ$$

$$R = \frac{r \sin 36^\circ}{1 - \sin 36^\circ} = 12.512448$$

よって、小円径は  $2R = 25.0245$  寸となり、前項の結果と等しい。