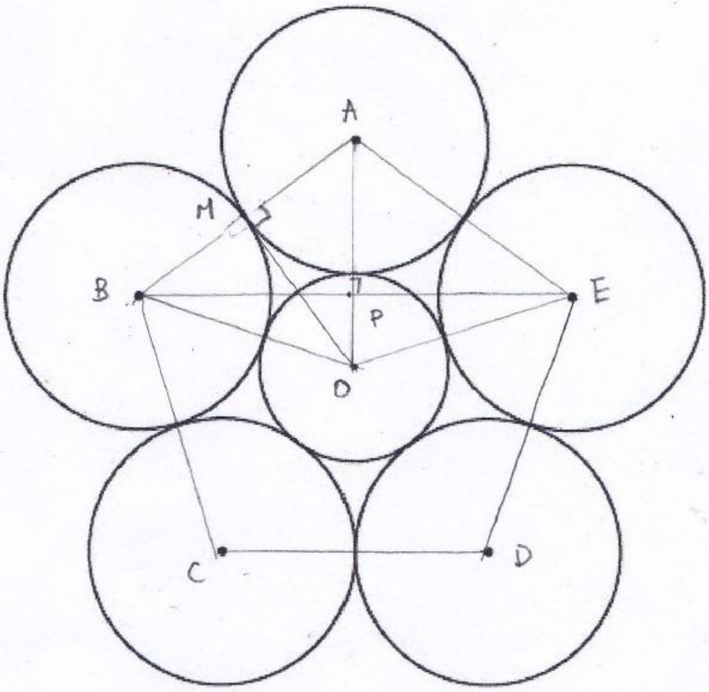
令和６年２月の問題-No.２



図のように、中円のまわりに、等円５個があります。中円の直径が、１７、５５寸のとき、等円の直径は何寸でしょうか？

５つの等円の中心を線で結ぶと、正五角形ができる。頂点をＡとし、反時計回りに各点をそれぞれＢ、Ｃ、Ｄ、Ｅとする。

中円の中心をＯとし、点Ａを結ぶ線と、点Ｂと点Ｅを結ぶ線との交点をＰ、正五角形の一辺である線ＡＢの中点をＭとする。

△AMOと△ＡＰＥは、相似な直角三角形なので、AO：MO＝AE：PE

PE＝BE×$\frac{1}{2}$ なので、　AO：MO＝AE：BE×$\frac{1}{2}$ となる。

ＢＥは、正五角形の対角線なので、和算の公式（算法助術）より、ＢＥ＝$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$×ＡＥ

よって、AO：MO＝AE：AE×$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$＝　1：$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$

等円の半径をｒ、中円の半径をｎとおくと、

$$AO = r + n,\quad MO = \sqrt{(r+n)^2 - r^2}$$

$$\therefore\ (r+n) : \sqrt{(r+n)^2 - r^2} = 1 : \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

すなわち、$\frac{\sqrt{5}+1}{4} \times (r+n) = \sqrt{n^2+2nr}$

両辺を２乗して整理して、

$$\frac{3+\sqrt{5}}{8} \times (r+n)^2 = 2nr + n^2$$

両辺に８を掛けて整理して、

$$(3+\sqrt{5})\, r^2 - 2 \times (5-\sqrt{5})\, nr - (5-\sqrt{5})\, n^2 = 0$$

両辺を３＋$\sqrt{5}$で割って

$$r^2 - 2 \times \frac{(5-\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{4} nr - \frac{(5-\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{4} n^2 = 0$$

すなわち、

$$r^2 - 2 \times \frac{(20-8\sqrt{5})}{4} \times nr - \frac{(20-8\sqrt{5})}{4} \times n^2 = 0$$

整理して、

$$r^2 - 2 \times (5-2\sqrt{5}) \times nr - (5-2\sqrt{5}) \times n^2 = 0$$

さらに、

$$(r - (5-2\sqrt{5}) \times n)^2 - (50-22\sqrt{5}) \times n^2 = 0$$

したがって、

$$r = ((5-2\sqrt{5}) \pm \sqrt{50-22\sqrt{5}})\, n$$

$r>0$なので、

$$r = ((5-2\sqrt{5}) + \sqrt{50-22\sqrt{5}})\, n$$

rは半径なので両辺を２倍して

$$2r = ((5-2\sqrt{5}) + \sqrt{50-22\sqrt{5}}) \times 2n$$

ここで、$2n=17,55$なので、

$$2r = 25,02489\cdots$$

すなわち、等円の直径は２５寸となる。