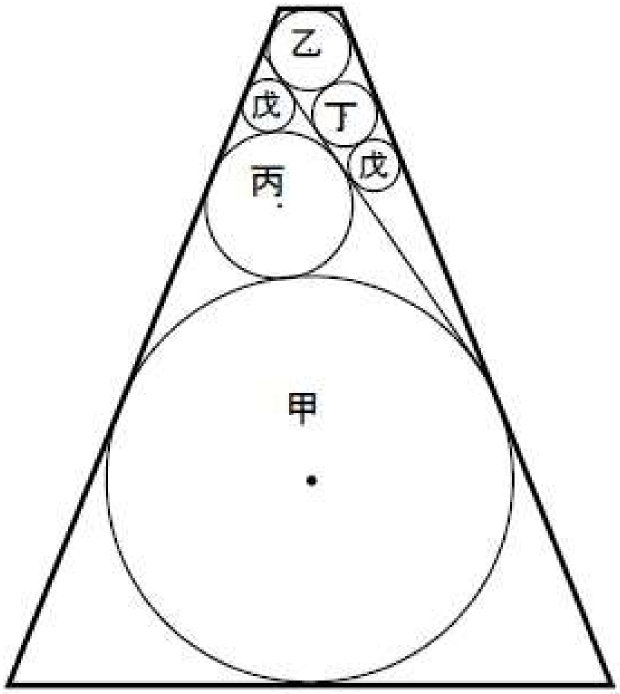
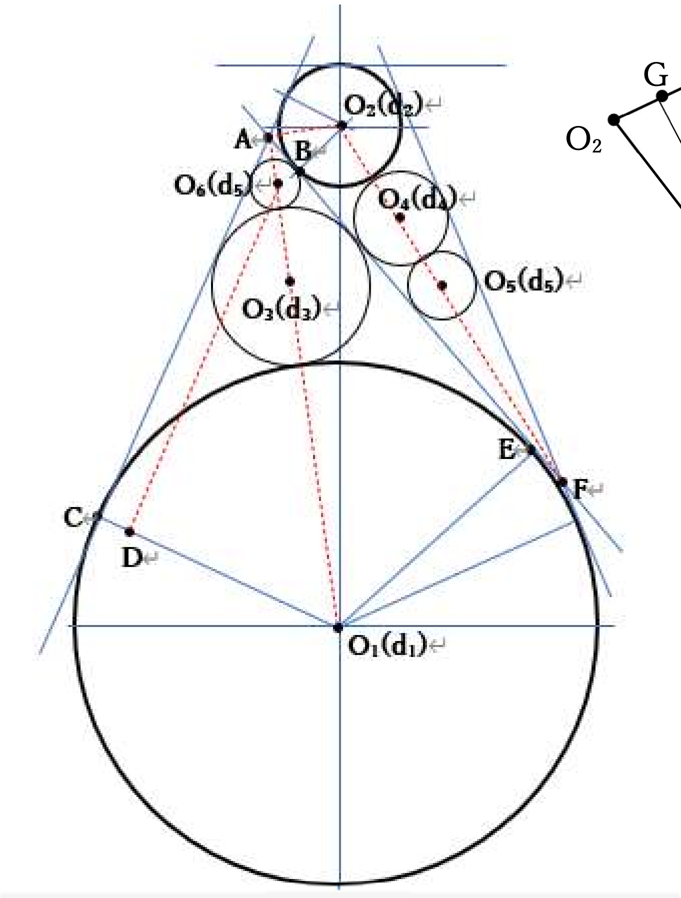


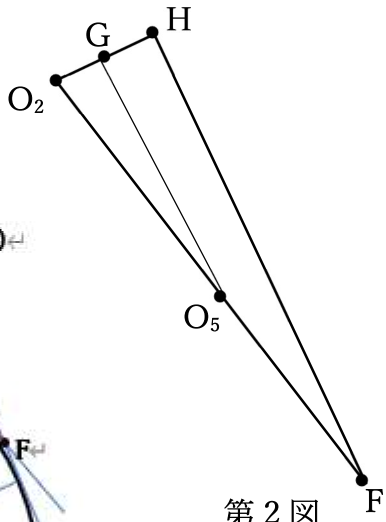
　図のように、等脚台形が線分により２つに区分されていて、甲，乙，丙，丁の各円が１個づつと、戊円が２個それぞれ接して容れてあります。
　甲円の直径が８１寸，乙円の直径が１６寸のとき、戊円の直径は、何寸でしょうか？
（寸を単位として帯分数で表して下さい。）

「神壁算法（じんぺきさんぽう）」　　第３７問　から作成
（埼玉の算額４　川越　八幡宮　第２問）

２月　問題３



第１図



第２図

（解答）

　甲円、乙円、丙円、丁円、戊円の直径をおのおの d_1,d_2,d_3,d_4,d_5 とし、各円の中心を第１図に示すように O_1,O_2,O_3,O_4,O_5,O_6 とする。また、各点の符号を図示の通りとする。

ステップ１（径 d_1，d_3，d_5 の関係を求める）

　三角形 O_6DO_1 に３平方の定理を適用する。

$$(\boldsymbol{O_1O_6})^2 = (\boldsymbol{O_6D})^2 + (\boldsymbol{O_1D})^2$$

$$\left(\frac{d_1}{2} + d_3 + \frac{d_5}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{d_1d_3} + \sqrt{d_3d_5}\right)^2 + \left(\frac{d_1}{2} - \frac{d_5}{2}\right)^2$$

$$d_1d_5 + {d_3}^2 - 2d_3\sqrt{d_1d_5} = 0$$

$$\left(\sqrt{d_1d_5} - d_3\right)^2 = 0$$

$$\therefore \qquad d_3 = \sqrt{d_1d_5} \qquad \cdots(1)$$

ステップ２（径 d_2，d_4，d_5 の関係を求める）

　ステップ１と同様に、３角形 O_2O_5G に３平方の定理を適用する。

$$(\boldsymbol{O_2O_5})^2 = (\boldsymbol{O_2G})^2 + (\boldsymbol{GO_5})^2$$

$$\left(\frac{d_2}{2} + d_4 + \frac{d_5}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{d_2 d_4} + \sqrt{d_4 d_5}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2} - \frac{d_5}{2}\right)^2$$

$$d_2 d_5 + {d_4}^2 - 2d_4\sqrt{d_2 d_5} = 0$$

$$\left(\sqrt{d_2 d_5} - d_4\right)^2 = 0$$

$$\therefore \qquad d_4 = \sqrt{d_2 d_5} \qquad \cdots(2)$$

ステップ３（線分 AC と線分 FH の長さを調べる）

直線 AF は、円 O_1 と円 O_2 の共通内接線であるから、線分の長さ AB と EF は等しくなる。この性質を適用すると、以下の関係となる。

$$\mathbf{AC = AE = AB + BE = EF + BE = BF = FH}$$

となり、結局 AC=FH となる。

ステップ４（線分 AC の長さを求める）

線分 BD の長さは、次式で与えられる。

$$(\mathbf{BD}) = \sqrt{d_5 d_3} + \sqrt{d_3 d_1}$$

三角形 O_1O_6D と三角形 O_1AC は相似であるから、線分 AC の長さは、次式で与えられる。

$$(\mathbf{AC}) = \frac{d_1}{d_1 - d_5}\left(\sqrt{d_5 d_3} + \sqrt{d_3 d_1}\right) \qquad \cdots(3)$$

ステップ５（線分 FH の長さを求める）

線分 GO_5 の長さは、次式で与えられる。

$$(\mathbf{GO_5}) = \sqrt{\mathbf{d_2 d_4}} + \sqrt{\mathbf{d_4 d_5}}$$

三角形 O_2O_5G と三角形 O_2FH は相似であるから、線分 FH の長さは、次式で与えられる。

$$(\mathbf{FH}) = \frac{d_2}{d_2 - d_5}\left(\sqrt{d_2 d_4} + \sqrt{d_4 d_5}\right) \qquad \cdots(4)$$

ステップ６（戊円の径を求める）

ステップ３で示したように、AC=FH であるから、(3)式＝(4)式とおき、さらに d_3、d_4 に(1),(2)を代入する。

$$\frac{d_1}{d_1 - d_5}\left(\sqrt{d_5 d_3} + \sqrt{d_3 d_1}\right) = \frac{d_2}{d_2 - d_5}\left(\sqrt{d_2 d_4} + \sqrt{d_4 d_5}\right)$$

$$\frac{d_1}{d_1 - d_5}\left(\sqrt{d_5\sqrt{d_1 d_5}} + \sqrt{\sqrt{d_1 d_5}\,d_1}\right) = \frac{d_2}{d_2 - d_5}\left(\sqrt{d_2\sqrt{d_2 d_5}} + \sqrt{\sqrt{d_2 d_5}\,d_5}\right)$$

両辺を平方する。

$$\left(\frac{\mathbf{d_1}}{\mathbf{d_1}-\mathbf{d_5}}\right)^2\left(\mathbf{d_5}\sqrt{\mathbf{d_1}\mathbf{d_5}}+2\mathbf{d_1}\mathbf{d_5}+\sqrt{\mathbf{d_1}\mathbf{d_5}}\mathbf{d_1}\right)=\left(\frac{\mathbf{d_2}}{\mathbf{d_2}-\mathbf{d_5}}\right)^2\left(\mathbf{d_2}\sqrt{\mathbf{d_2}\mathbf{d_5}}+2\mathbf{d_2}\mathbf{d_5}+\sqrt{\mathbf{d_2}\mathbf{d_5}}\mathbf{d_5}\right)$$

$$\left(\frac{\mathbf{d_1}}{\mathbf{d_1}-\mathbf{d_5}}\right)^2\sqrt{\boldsymbol{d_1}\boldsymbol{d_5}}\left(\mathbf{d_5}+2\sqrt{\mathbf{d_1}\mathbf{d_5}}+\mathbf{d_1}\right)=\left(\frac{\mathbf{d_2}}{\mathbf{d_2}-\mathbf{d_5}}\right)^2\sqrt{\mathbf{d_2}\mathbf{d_5}}\left(\mathbf{d_2}+2\sqrt{\mathbf{d_2}\mathbf{d_5}}+\mathbf{d_5}\right)$$

$$\left(\frac{\mathbf{d_1}}{\mathbf{d_1}-\mathbf{d_5}}\right)^2\sqrt{\boldsymbol{d_1}}\left(\sqrt{\mathbf{d_5}}+\sqrt{\mathbf{d_1}}\right)^2=\left(\frac{\mathbf{d_2}}{\mathbf{d_2}-\mathbf{d_5}}\right)^2\sqrt{\mathbf{d_2}}\left(\sqrt{\mathbf{d_2}}+\sqrt{\mathbf{d_5}}\right)^2$$

ここで題意より、d_1=81 寸、d_2=16 寸を適用し、$\sqrt{\boldsymbol{d_5}}$について解くと、

$$\sqrt{\boldsymbol{d_5}}=\frac{\mathbf{684}}{\mathbf{211}}\ \boldsymbol{or}\ \frac{\mathbf{252}}{\mathbf{55}}$$

を得る。上式を平方すると、

$$\boldsymbol{d_5}=\frac{\mathbf{467856}}{\mathbf{44521}}=\mathbf{10}\frac{\mathbf{22646}}{\mathbf{44521}}=\mathbf{10.5809}$$

or

$$\mathbf{d_5}=\frac{\mathbf{63504}}{\mathbf{3025}}=\mathbf{20}\frac{\mathbf{3004}}{\mathbf{3025}}=\mathbf{20.99306}$$

となる。上記 2 個の解答に対してどちらが妥当であるかを調べる。題意より、$\boldsymbol{d_5}\leq\boldsymbol{d_2}$であるから、$d_2$として上側の

$$\boldsymbol{d_5}=\frac{\mathbf{467856}}{\mathbf{44521}}=\mathbf{10}\frac{\mathbf{22646}}{\mathbf{44521}}$$

が妥当である。

（答　戊円直径$=\mathbf{10}\frac{\mathbf{22646}}{\mathbf{44521}}$寸）