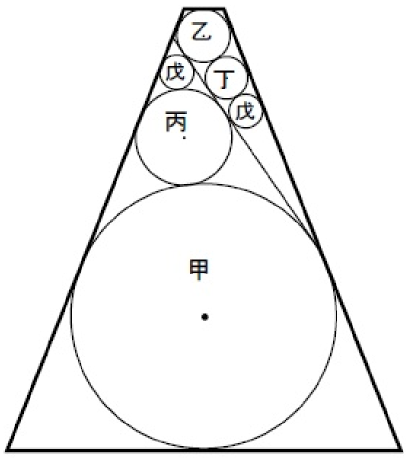
令和６年２月の問題-No.3

問題

出題図を図１に示す。



図のように、等脚台形が線分により２つに区分されていて、甲，乙，丙，丁の各円が１個づつと、戊円が２個それぞれ接して容れてあります。

甲円の直径が８１寸，乙円の直径が１６寸のとき、戊円の直径は、何寸でしょうか？

（寸を単位として帯分数で表して下さい。）

「神壁算法（じんぺきさんぽう）」　　第３７問　から作成

（埼玉の算額４　川越　八幡宮　第２問）

図１　出題図

解答

図 2 を用いて戊円径を導出する。等脚台形の底角を 2θ、$\angle EGH = 2\phi_1$、$\angle GHF = 2\phi_2$(H は台形を区分する線分と台形斜線との交点)、$\angle BDG = 2\alpha$ とする。また、$\angle ABC = \beta$ とすると同位角の関係より $\angle BFG = \beta$ となり、$\angle BAC = 2\theta$ となる。

戊→丙→甲円径は同一の比率 k_1 で大きくなる。また、戊→丁→乙円径も同様に同一の比率 k_2 で大きくなる。これは、図 3 に示すように角の二等分線上に中心がある、2 線に接して互いに外接する半径 1 と半径 $k > 1$ の 2 円の関係を考えると、三平方の定理を用いて以下のように明らかである。k を円径の倍率と考えると、その倍率は角の二分角 ϕ で定まる。逆に、倍率 k が与えられると $\sin\phi$ の値が定まる。

$$(k+1)^2 = (k-1)^2 + (\frac{k}{\tan\phi} - \frac{1}{\tan\phi})^2 \tag{1}$$
$$= (k-1)^2(1 + \frac{1}{\tan^2\phi}) \tag{2}$$
$$= (k-1)^2(\frac{1}{\sin^2\phi}) \tag{3}$$
$$k+1 = \frac{k-1}{\sin\phi} \tag{4}$$
$$\sin\phi = \frac{k-1}{k+1} \tag{5}$$
$$k = \frac{1+\sin\phi}{1-\sin\phi} \tag{6}$$

戊円径を x とした場合の $k_1, \sin\phi_1$ を考えると、以下のようになる。

$$xk_1^2 = 81 \tag{7}$$
$$k_1 = \frac{9}{\sqrt{x}} \tag{8}$$
$$\sin\phi_1 = \frac{k_1-1}{k_1+1} = \frac{\frac{9}{\sqrt{x}}-1}{\frac{9}{\sqrt{x}}+1} \tag{9}$$

$k_2, \sin\phi_2$ についても同様に考えて

$$k_2 = \frac{4}{\sqrt{x}} \tag{10}$$
$$\sin\phi_2 = \frac{k_2-1}{k_2+1} = \frac{\frac{4}{\sqrt{x}}-1}{\frac{4}{\sqrt{x}}+1} \tag{11}$$

となる。

続いて、図中の角度について考える。等脚台形は線分 AB の長さを決めると形状が一意に定まるので、線分 AB の長さを t としたときに図中の角度がどうなるかを求める。

A, B から台形を分割する線分 GH に垂線を引いた時の足をそれぞれ A', B' とすれば、$\triangle\ AA'D \backsim \triangle\ BB'D$ となる。よって、線分 AB は、台形を分割する線分 GH と中心軸との交点 D で $BD : DA = 16 : 81$ に分割され、線分 BD の長さは以下のようになる。

$$BD = \frac{16}{81+16}t = \frac{16}{97}t \tag{12}$$

また、$BB' =$ 乙円の半径 $= \frac{16}{2} = 8$ であるので、

$$\sin 2\alpha = \frac{BB'}{BD} = \frac{8}{\frac{16}{97}t} = \frac{97}{2t} \tag{13}$$

を得る。

$AC =$ 甲円の半径 $-$ 乙円の半径 $= \frac{81}{2} - 8$ であるので、

$$\cos 2\theta = \frac{AC}{AB} = \frac{\frac{81}{2} - 8}{t} = \frac{65}{2t} \tag{14}$$

を得る。

$\angle EGD = 2\phi_1$ は、点 G から底辺への垂線の足 G' を考えて、$\angle BDG$ の錯角 $\angle G'GD$ と $\angle G'GE$ との和と等しいので、

$$2\phi_1 = \frac{\pi}{2} - 2\theta + 2\alpha \tag{15}$$

となる。

$\triangle FGH$ の内角の和が π であるので、$\beta = \frac{\pi}{2} - 2\theta$ を考慮して

$$2\phi_2 = \pi - 2\beta - (\pi - 2\phi_1) = 4\theta + 2\phi_1 - \pi \tag{16}$$

$$2\theta = \frac{\pi}{2} - \phi_1 + \phi_2 \tag{17}$$

となる。(17) 式を (15) 式に代入すれば

$$2\alpha = \phi_1 + \phi_2 \tag{18}$$

を得る。

角度の関係を用いて x を求める。$\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\theta}$ を考えると、

$$\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\theta} = \frac{97}{2t}\frac{2t}{65} = \frac{97}{65} \tag{19}$$

$$\tag{20}$$

が t によらず成立する。これに (17),(18) 式を代入して

$$\frac{\sin(\phi_1 + \phi_2)}{\cos(\frac{\pi}{2} - \phi_1 + \phi_2)} = \frac{97}{65} \tag{21}$$

$$\tag{22}$$

が成立する。cos に関して三角関数の公式より変換を行うと

$$\frac{\sin(\phi_1+\phi_2)}{\sin(\phi_1-\phi_2)}=\frac{97}{65} \tag{23}$$

となり、これを分解していくと、

$$65(\sin\phi_1\cos\phi_2+\sin\phi_2\cos\phi_1)=97(\sin\phi_1\cos\phi_2-\sin\phi_2\cos\phi_1) \tag{24}$$
$$32\sin\phi_1\cos\phi_2=162\sin\phi_2\cos\phi_1 \tag{25}$$
$$16\sin\phi_1\cos\phi_2=81\sin\phi_2\cos\phi_1 \tag{26}$$

両辺を二乗して

$$16^2\sin^2\phi_1\cos^2\phi_2=81^2\sin^2\phi_2\cos^2\phi_1 \tag{27}$$
$$16^2\sin^2\phi_1(1-\sin^2\phi_2)=81^2\sin^2\phi_2(1-\sin^2\phi_1) \tag{28}$$

左辺に (9),(11) 式を代入して、更に $\sqrt{x}=y$ とすると

$$16^2(\frac{\frac{9}{y}-1}{\frac{9}{y}+1})^2(1-(\frac{\frac{4}{y}-1}{\frac{4}{y}+1})^2)=81^2(\frac{\frac{4}{y}-1}{\frac{4}{y}+1})^2(1-(\frac{\frac{9}{y}-1}{\frac{9}{y}+1})^2) \tag{29}$$

$y\neq 0$ であることから通分してまとめると

$$32^2(\frac{9}{y}-1)^2=243^2(\frac{4}{y}-1)^2 \tag{30}$$
$$(-\frac{684}{y}+211)(\frac{1260}{y}-275)=0 \tag{31}$$

これを解いて $y=\frac{684}{211}, y=\frac{1260}{275}=\frac{252}{55}$ を得る。これから $x=y^2$ より戊円の径を求めると、

$$x=(\frac{684}{211})^2\fallingdotseq 10.5086 \quad \text{(適)} \tag{32}$$
$$x=(\frac{252}{55})^2\fallingdotseq 20.993 \quad \text{(乙円径を超えるため不適)} \tag{33}$$

となり、戊円径 $x=(\frac{684}{211})^2=\frac{467856}{44521}=10\frac{22646}{44521}$ 寸となる。

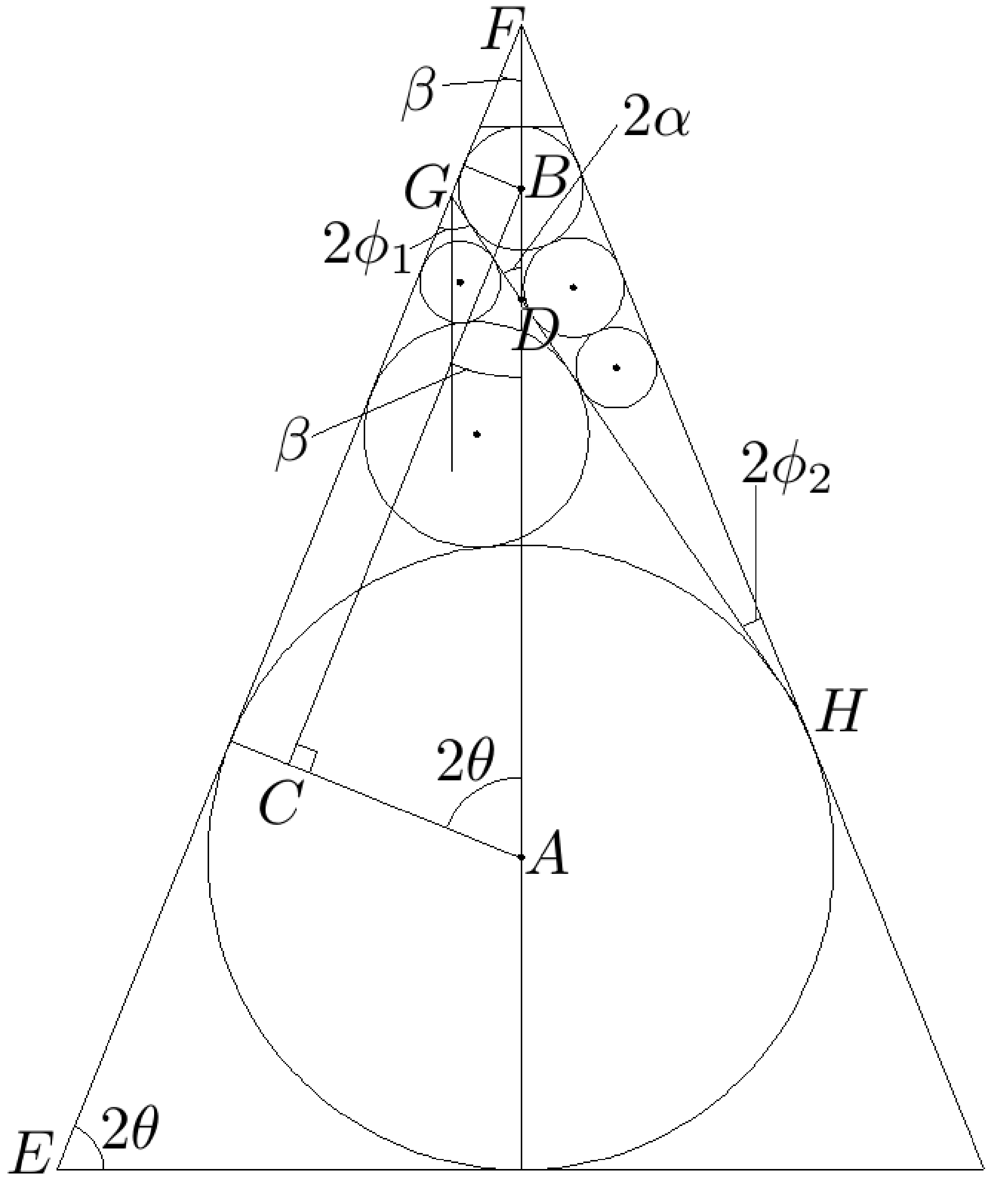


図 2

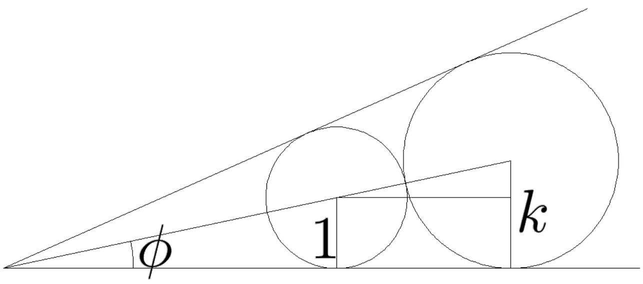


図 3