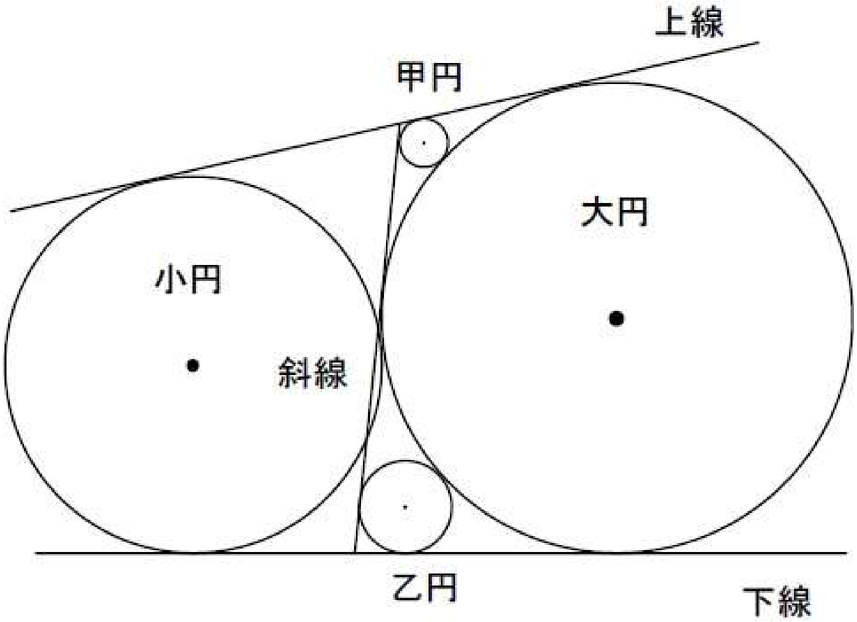
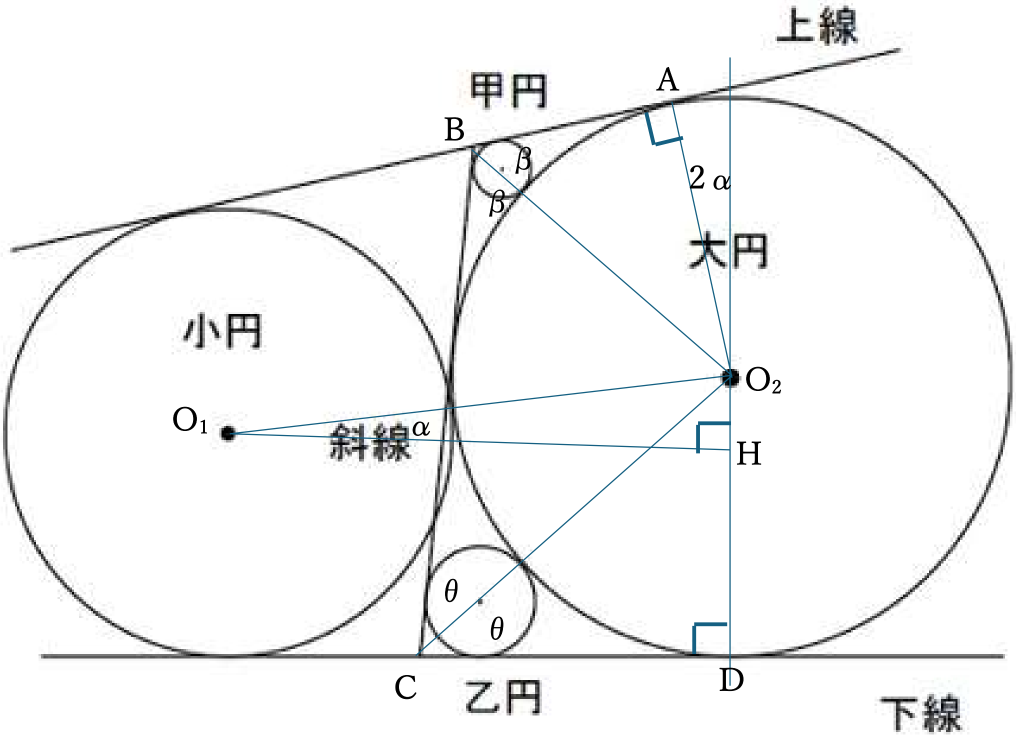
令和６年３月の問題-No.3



図のように、上線と下線にはさまれて、たがいに接する大円と小円があります。さらに、大円に接する斜線があります。甲円は、大円と上線と斜線に接していて、乙円は大円と下線と斜線に接しています。

大円の直径が２４５寸，小円の直径が１９６寸，甲円の直径が２５寸のとき、乙円の直径は何寸でしょうか？

神壁算法　第４問　　から作成



（解）

小円、大円、甲円、乙円の半径をおのおのr_1, r_2, r_3, r_4とおく。また、各点の符号を上図に示すように付ける。また$\angle O_2O_1H = \alpha$, $\angle O_2BA = \beta$，$\angle O_2CD = \theta$とおく。

ステップ１（角度の関係）

上図に示されるように四角形の内角の和は２πであることから、

$$2\theta + 2\beta + \left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) + \frac{\pi}{2} = 2\pi$$

$$2\theta + 2\beta - 2\alpha = \pi$$

$$\therefore \quad \theta = \frac{\pi}{2} - (\beta - \alpha) \qquad \cdots(1)$$

ステップ２（正接の関係）

上図に示される角度α、β、θの正接を取る。図より、

$$\tan\alpha = \frac{r_2 - r_1}{2\sqrt{r_1 r_2}} \qquad \cdots(2)$$

$$\tan\beta = \frac{r_2 - r_3}{2\sqrt{r_2 r_3}} \qquad \cdots(3)$$

$$\tan\theta = \frac{r_2 - r_4}{2\sqrt{r_2 r_4}} \qquad \cdots(4)$$

となる。次に、(1)式の正接を取ると、

$$\tan\theta = \tan\left\{\frac{\pi}{2} - (\beta - \alpha)\right\}$$

$$=\frac{\tan\frac{\pi}{2}-\tan(\beta-\alpha)}{1+\tan\frac{\pi}{2}\cdot\tan(\beta-\alpha)}$$

$$=\frac{1}{\tan(\beta-\alpha)}$$

ここで更に上式の分母は次式で表される。

$$\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\cdot\tan\alpha}$$

従って、

$$\tan\theta=\frac{1+\tan\beta\cdot\tan\alpha}{\tan\beta-\tan\alpha}\qquad\cdots(5)$$

となる。そして、（２)、（３）式を（５）式に代入する。

$$\tan\theta=\frac{1+\left(\frac{r_2-r_1}{2\sqrt{r_1r_2}}\right)\left(\frac{r_2-r_3}{2\sqrt{r_2r_3}}\right)}{\frac{r_2-r_3}{2\sqrt{r_2r_3}}-\frac{r_2-r_1}{2\sqrt{r_1r_2}}}$$

$$=\frac{4r_2\sqrt{r_1r_3}+(r_2-r_1)(r_2-r_3)}{2\sqrt{r_2}\left\{\sqrt{r_1}(r_2-r_3)-\sqrt{r_3}(r_2-r_1)\right\}}\qquad\ldots(6)$$

となる。(4)式=(6)式であるから、

$$\frac{r_2-r_4}{2\sqrt{r_2r_4}}=\frac{4r_2\sqrt{r_1r_3}+(r_2-r_1)(r_2-r_3)}{2\sqrt{r_2}\left\{\sqrt{r_1}(r_2-r_3)-\sqrt{r_3}(r_2-r_1)\right\}}\quad\cdots(7)$$

を得る。

ステップ３（乙円径を求める）

題意より、小円、大円、甲円の半径は、$r_1=98$寸, $r_2=122.5$寸 ,$r_3=12.5$寸であるから、これらを（7）式に代入し、乙円の半径 r_4 を求めると、

$$\sqrt{r_4}=4.949747469\ \ or-24.74873734$$

となる。$\sqrt{r_4}\geq 0$であることより、上式の 2 項目は不適。上式の 1 項目を二乗し、

$$r_4=24.5$$

従って、乙円の直径は$2r_4=49$寸となる。

（答　乙円径 49 寸）