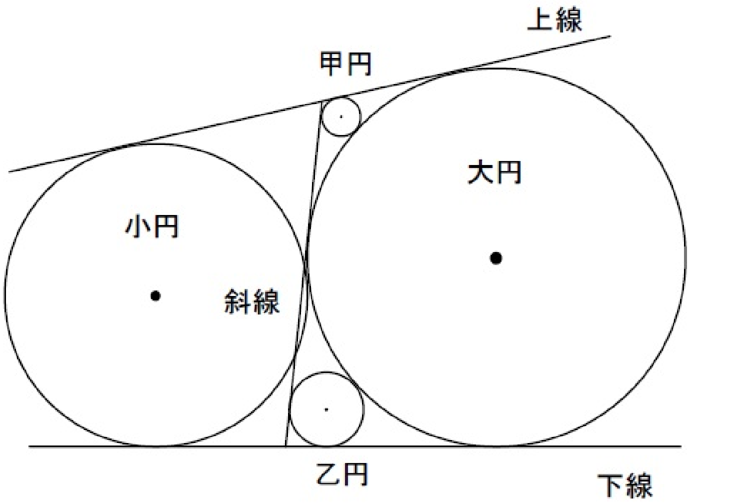
令和６年３月の問題-No.3

問題

出題図を図１に示す。



図のように、上線と下線にはさまれて、たがいに接する大円と小円があります。さらに、大円に接する斜線があります。甲円は、大円と上線と斜線に接していて、乙円は大円と下線と斜線に接しています。

大円の直径が２４５寸，小円の直径が１９６寸，甲円の直径が２５寸のとき、乙円の直径は何寸でしょうか？

神壁算法　第４問　　から作成

図１　出題図

解答

図 2 を用いて考察する。まず、上線と下線のなす角 2ϕ について考える。令和 6 年 2 月の問題 3 で用いた、2 辺に接し互いに外接する 2 円の径の比 k と 2 辺のなす角 2θ の関係

$$\sin\theta = \frac{k-1}{k+1} \tag{1}$$

$$k = \frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta} \tag{2}$$

から、大円径と小円径の比 $= \frac{245}{196} = \frac{5}{4}$ であるので、(1) 式より正弦を求め、余弦、正接も求めると

$$\sin\phi = \frac{\frac{5}{4}-1}{\frac{5}{4}+1} = \frac{1}{9} \tag{3}$$

$$\cos\phi = \frac{4\sqrt{5}}{9} \tag{4}$$

$$\tan\phi = \frac{\sqrt{5}}{20} \tag{5}$$

を得る。同様にして、甲円径 25 寸、大円径 245 寸より、大円と甲円の径の比は $\frac{49}{5}$ である。(1) 式より

$$\sin\alpha = \frac{\frac{49}{5}-1}{\frac{49}{5}+1} = \frac{22}{27} \tag{6}$$

$$\cos\alpha = \frac{7\sqrt{5}}{27} \tag{7}$$

$$\tan\alpha = \frac{22\sqrt{5}}{35} \tag{8}$$

となる。

$2\alpha - 2\phi$ が 2β の補角になるため、以下の関係が成立する。

$$2\alpha - 2\phi + 2\beta = \pi \tag{9}$$

これを変形して

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} + \phi \tag{10}$$

となる。この両辺の正接を考えて式変形すると

$$\tan(\alpha+\beta) = \tan(\frac{\pi}{2}+\phi) = -\frac{1}{\tan\phi} \tag{11}$$

$$\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} = -\frac{1}{\tan\phi} \tag{12}$$

$$\frac{\frac{22\sqrt{5}}{35}+\tan\beta}{1-\frac{22\sqrt{5}}{35}\tan\beta} = -\frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{20}} \tag{13}$$

となり、これを $\tan\beta$ について解いて、正弦も求めると

$$\tan\beta = \frac{2\sqrt{5}}{5} \tag{14}$$

$$\sin\beta = \frac{2}{3} \tag{15}$$

を得る。乙円径と大円径の比を (2) 式より求めれば

$$\frac{(\text{大円径})}{(\text{乙円径})} = \frac{1+\sin\beta}{1-\sin\beta} = \frac{1+\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} = 5 \tag{16}$$

である。よって乙円径は、大円径の $\frac{1}{5} = 245 \times \frac{1}{5} = 49$ 寸となる。

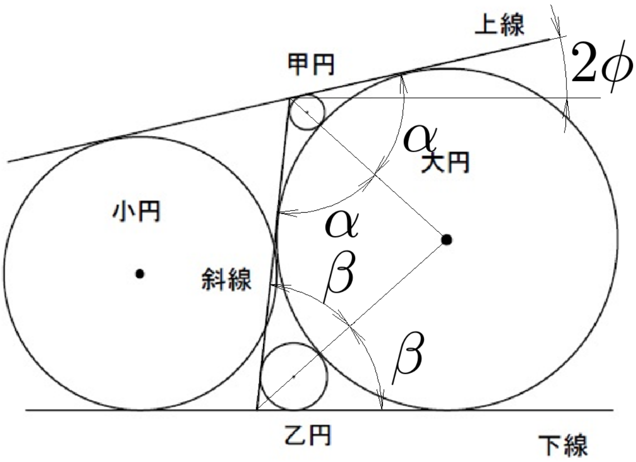


図 2