令和６年４月の問題-No.3

問題

出題図を図１に示す。

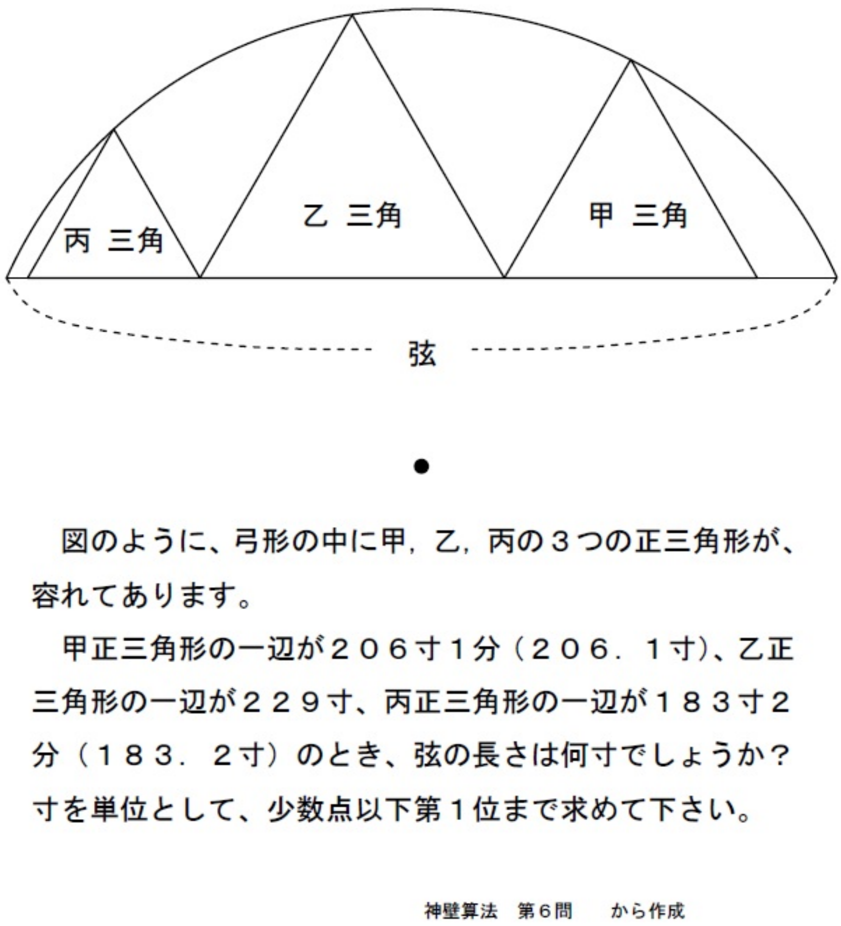

図１　出題図

解答

図 2 のように丙三角形の左底角を原点 O にとる座標を考える。各三角形の辺の長さから、各三角形の頂点 A, B, C の座標は以下のようになる。

$$A : (91.6, 91.6\sqrt{3}) \tag{1}$$
$$B : (297.7, 114.5\sqrt{3}) \tag{2}$$
$$C : (515.25, 103.05\sqrt{3}) \tag{3}$$

弓形の弧を表す円の中心 $P(a, b)$、半径 r が得られれば、弦の長さを求められる。解法として、円の方程式 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ が点 A, B, C で成立することから、a, b, r に関する 3 連立非線形方程式を解いて a, b, r を求める方法や、線分 AB, BC の垂直二等分線の式から交点 $P(a, b)$ を求め、続いて r を求める方法等が考えられる。今回は前者の方法を用いた。円の方程式を変形して $2ax + 2by + (r^2 - a^2 - b^2) = x^2 + y^2$ であるので、

$$2ax_i + 2by_i + (r^2 - a^2 - b^2) = x_i^2 + y_i^2 \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{4}$$

を $a, b, (r^2 - a^2 - b^2)$ について解くとみなせば、3 連立非線形方程式を解くことは、3 連立線形方程式を解き、続いて $(r^2 - a^2 - b^2)$ を r について解くことに簡易化できる。これを解いて最終的に $a = \frac{13511}{40}, b = -\frac{13053\sqrt{3}}{40}, r = \frac{1603\sqrt{91}}{20}$ を得る。円の方程式を $y = 0$ と連立して解き、得られる解 x は以下となる。

$$x = \frac{13511 \pm \sqrt{424195249}}{40} \tag{5}$$

弦の長さは、解 x の大きい方から小さい方を引けば得られるので、弦の長さ $= \frac{2\sqrt{424195249}}{40} = \frac{\sqrt{424195249}}{20} \fallingdotseq 1029.80004005632$、よって約 1029.8 寸となる。実際に作図すると図 3 のような形状となる。

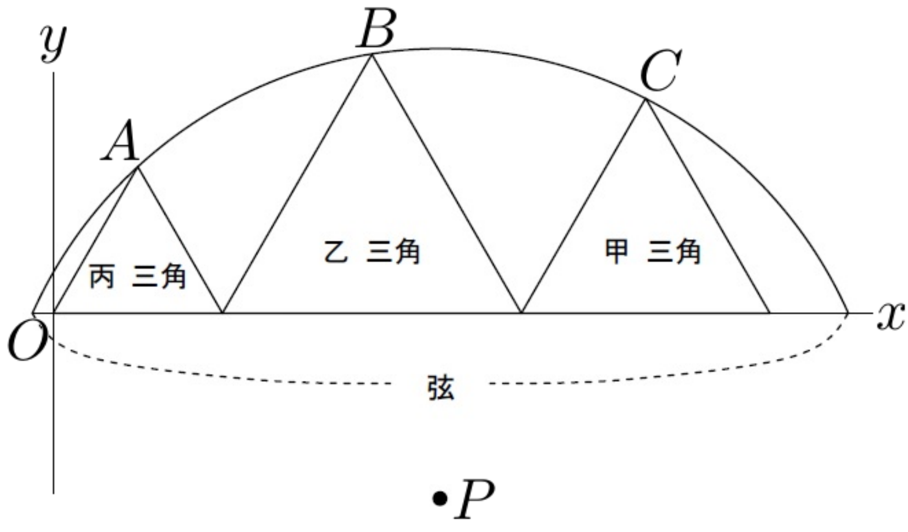

図 2

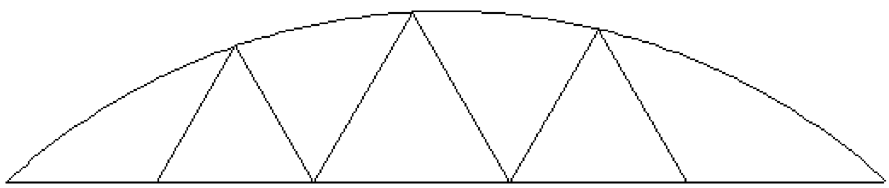
図 3