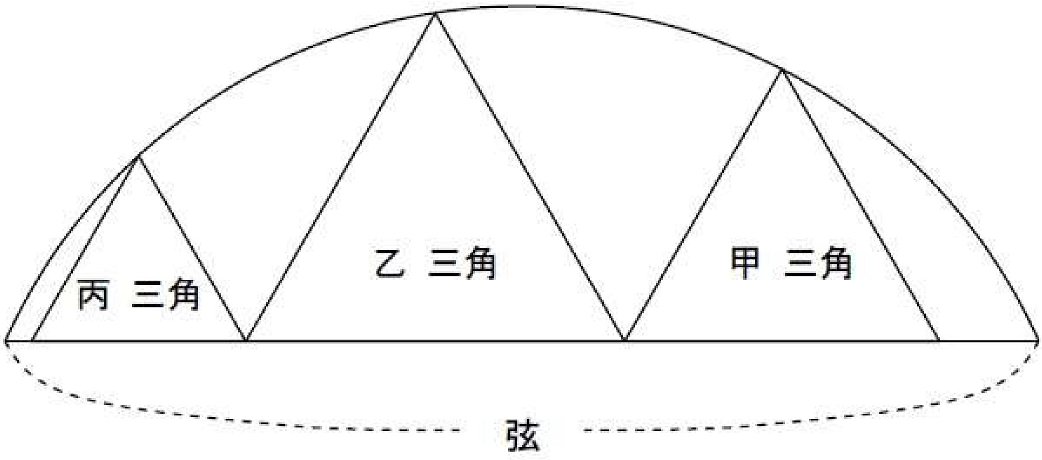
4月問題第3問

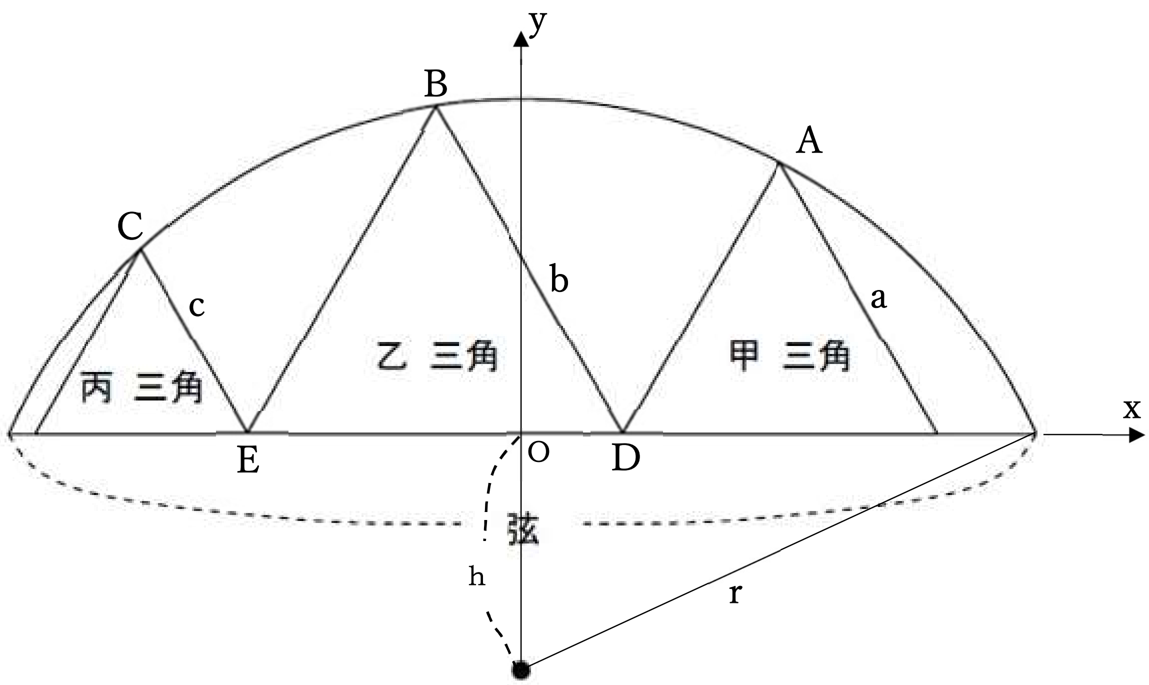


●

図のように、弓形の中に甲，乙，丙の３つの正三角形が、容れてあります。

甲正三角形の一辺が２０６寸１分（２０６．１寸）、乙正三角形の一辺が２２９寸、丙正三角形の一辺が１８３寸２分（１８３．２寸）のとき、弦の長さは何寸でしょうか？寸を単位として、少数点以下第１位まで求めて下さい。

神壁算法　第６問　　から作成



（解）

甲三角形、乙三角形、丙三角形の 1 辺の長さをおのおの a、b、c とする。また、円弧と甲三角形、乙三角形、丙三角形との接点をおのおの A、B、C とする。次に、x 軸が弦と一致し、y 軸が円弧の中心を通るように x - y 座標系をおく（上図参照）。すると、円弧の式は次式で与えられる。

$$\boldsymbol{x^2 + (y + h)^2 = r^2} \qquad \cdots(\mathbf{1})$$

ステップ１（点Ａ，Ｂ，Ｃの座標を整理する）

点Ａ，Ｂ，Ｃの座標を以下に示す。点Ａ，Ｂ，Ｃの y 座標は各三角形の高さに等しい。よって、

$$\text{点 A}\left(\boldsymbol{A_x, \frac{\sqrt{3}}{2}a}\right), \quad \text{点 B}\left(\boldsymbol{B_x, \frac{\sqrt{3}}{2}b}\right), \quad \text{点 C}\left(\boldsymbol{C_x, \frac{\sqrt{3}}{2}c}\right)$$

と表される。各点の x 座標は、（1）式より、以下のように表わされる。

$$\boldsymbol{(A_x)^2 = r^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a + h\right)^2}$$

同様に、

$$\boldsymbol{(B_x)^2 = r^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}b + h\right)^2}$$

$$\boldsymbol{(C_x)^2 = r^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}c + h\right)^2}$$

と表される。

ステップ２（座標 Dx,Ex を求める）

甲、乙、丙円は正三角形であるから、点 D,E の x 座標は以下に示される。D x を甲円から見ると、

$$\boldsymbol{Dx = \sqrt{r^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a + h\right)^2} - \frac{1}{2}a \qquad \cdots (1)}$$

また、D x を乙円から見ると、

$$\boldsymbol{Dx = -\sqrt{r^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}b + h\right)^2} + \frac{1}{2}\, b \qquad \cdots (2)}$$

となる。同様に、E x は乙円から見ると、

$$\boldsymbol{Ex = -\sqrt{r^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}b + h\right)^2} - \frac{1}{2}\, b \qquad \cdots (3)}$$

丙円から見ると、

$$\boldsymbol{Ex = -\sqrt{r^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}c + h\right)^2} + \frac{1}{2}\, c \qquad \cdots (4)}$$

となる。

ステップ３（円弧の半径 r 及び h を求める）

計算を分かりやすくするため、(1)、(2)、(3)、(4)式の根号内のカッコ部を以下のようにおく。

$$\boldsymbol{A = \frac{\sqrt{3}}{2}a + h}$$

$$\boldsymbol{B = \frac{\sqrt{3}}{2}b + h}$$

$$\boldsymbol{C = \frac{\sqrt{3}}{2}c + h}$$

すると、D x，E x は以下のように表される。

$$\boldsymbol{Dx = \sqrt{r^2 - A^2} - \frac{1}{2}a = -\sqrt{r^2 - B^2} + \frac{1}{2}\, b \qquad \cdots (5)}$$

$$\boldsymbol{Ex = -\sqrt{r^2 - B^2} - \frac{1}{2}b = -\sqrt{r^2 - C^2} + \frac{1}{2}\, c \qquad \cdots (6)}$$

次に、（５）式から根号をなくすため、（５）式を変形し、両辺を平方する。

$$\boldsymbol{\left\{(a + b) - 2\sqrt{r^2 - A^2}\right\}^2 = \left(2\sqrt{r^2 - B^2}\right)^2}$$

上式を整理すると、

$$(a+b)^4+8(a+b)^2(A^2+B^2-2r^2)+16(-A^2+B^2)^2=0$$

となる。ここで、A,B を元に戻すと、

$$(a+b)^4+6(a+b)^2(a^2+b^2)+8\sqrt{3}h(a+b)^3+16(a+b)^2(h^2-r^2)+9(a^2-b^2)^2$$
$$+24\sqrt{3}h(a^2-b^2)(a-b)+48h^2(a-b)^2=0 \qquad \cdots(7)$$

同様な対応を（６）式に対しても行う。すると、

$$(b+c)^4+6(b+c)^2(b^2+c^2)+8\sqrt{3}h(b+c)^3+16(b+c)^2(h^2-r^2)+9(b^2-c^2)^2$$
$$+24\sqrt{3}h(b^2-c^2)(b-c)+48h^2(b-c)^2=0 \qquad \cdots(8)$$

となる。（７）式から r の式を求める。すると、

$$16r^2=(a+b)^2+6(a^2+b^2)+8\sqrt{3}h(a+b)+16h^2+9(a-b)^2+24\sqrt{3}h\frac{(a-b)^2}{a+b}$$
$$+\frac{48h^2(a-b)^2}{(a+b)^2} \qquad \cdots(9)$$

同様に、（８）式より、

$$16r^2=(b+c)^2+6(b^2+c^2)+8\sqrt{3}h(b+c)+16h^2+9(b-c)^2+24\sqrt{3}h\frac{(b-c)^2}{b+c}$$
$$+\frac{48h^2(b-c)^2}{(b+c)^2} \qquad \cdots(10)$$

となる。（９）＝（１０）式より、

$$6h^2\left\{\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}-\frac{(b-c)^2}{(b+c)^2}\right\}+3\sqrt{3}h\left\{\frac{(a-b)^2}{(a+b)}-\frac{(b-c)^2}{(b+c)}\right\}+\sqrt{3}h(a-c)+2(a+c)(a-c)$$
$$-2b(a-c)=0 \qquad \cdots(11)$$

を得る。

題意より、a=206.1 寸、 b=229 寸、C=183.2 寸であるから、これらを（11）式に代入し h を求める。

$$h=\frac{13053\sqrt{3}}{40} \qquad \cdots(12)$$

となる。次に上記を（9）式に代入し r を求める。すると、

$$r=764.58227 \qquad \cdots(13)$$

となる。三平方の定理を適用し弦長を求める。

$$\frac{1}{2}\text{弦長}=\sqrt{r^3-h^2}=514.90002$$

従って、弦長は 1029.8 寸となる。

（答　1029.8 寸）