

2024年4月9日

横田@EL3科学アカデミー

群馬県和算研究会 令和6年4月の問題-No. 3の解答

令和6年4月の問題-No.3

●

図のように、弓形の中に甲、乙、丙の3つの正三角形が、容れてあります。

甲正三角形の一辺が206寸1分(206.1寸)、乙正三角形の一辺が229寸、丙正三角形の一辺が183寸2分(183.2寸)のとき、弦の長さは何寸でしょうか？寸を単位として、少数点以下第1位まで求めて下さい。

神壁算法 第6問 から作成

解答

計算の単純化のために、 $1/22.9$ に縮尺して検討することにし、

甲正三角形の一辺を $a = 8$ 、乙正三角形の一辺を $b = 10$ 、丙正三角形の一辺を $c = 9$ とする。

図1に示すように、弓形の円弧の半径を r 、円弧の中心から弦までの距離を h とする。

直角三角形 OAD 、直角三角形 OBE 、直角三角形 OCF の斜辺の長さは、いずれも r であり、次の関係がある。なお、直角三角形 OAD の辺 DO の長さを w とする。

直角三角形 OAD について、

$$r^2 = \left(h + \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 + w^2 = \left(h + \frac{\sqrt{3}}{2} \times 8\right)^2 + w^2 = h^2 + 8\sqrt{3}h + 48 + w^2 \quad (1)$$

直角三角形 OBE について、

$$\begin{aligned}
 r^2 &= \left(h + \frac{\sqrt{3}}{2}b\right)^2 + \left(w - \frac{1}{2}(a+b)\right)^2 = \left(h + \frac{\sqrt{3}}{2} \times 10\right)^2 + (w-9)^2 \\
 &= h^2 + 10\sqrt{3}h + 156 + w^2 - 18w
 \end{aligned} \tag{2}$$

直角三角形OCFについて、

$$\begin{aligned}
 r^2 &= \left(h + \frac{\sqrt{3}}{2}c\right)^2 + \left(w - \frac{1}{2}(a+2b+c)\right)^2 = \left(h + \frac{\sqrt{3}}{2} \times 9\right)^2 + \left(w - \frac{37}{2}\right)^2 \\
 &= h^2 + 9\sqrt{3}h + 403 + w^2 - 37w
 \end{aligned} \tag{3}$$

式(1)と式(2)から、

$$\begin{aligned}
 h^2 + 8\sqrt{3}h + 48 + w^2 &= h^2 + 10\sqrt{3}h + 156 + w^2 - 18w \\
 8\sqrt{3}h + 48 &= 10\sqrt{3}h + 156 - 18w \\
 h &= \sqrt{3}(3w - 18)
 \end{aligned} \tag{4}$$

式(1)と式(3)から、

$$\begin{aligned}
 h^2 + 8\sqrt{3}h + 48 + w^2 &= h^2 + 9\sqrt{3}h + 403 + w^2 - 37w \\
 8\sqrt{3}h + 48 &= 9\sqrt{3}h + 403 - 37w \\
 h &= \sqrt{3}\left(\frac{37}{3}w - \frac{355}{3}\right)
 \end{aligned} \tag{5}$$

式(4)と式(5)から、

$$\begin{aligned}
 3w - 18 &= \frac{37}{3}w - \frac{355}{3} \\
 w &= \frac{43}{4}
 \end{aligned} \tag{6}$$

式(6)を式(4)に代入すると、

$$h = \sqrt{3}(3w - 18) = \sqrt{3}\left(3 \times \frac{43}{4} - 18\right) = \frac{57\sqrt{3}}{4} \tag{7}$$

式(6)と式(7)を式(1)に代入すると、

$$\begin{aligned}
 r^2 &= h^2 + 8\sqrt{3}h + 48 + w^2 = \left(\frac{57\sqrt{3}}{4}\right)^2 + 8\sqrt{3}\left(\frac{57\sqrt{3}}{4}\right) + 48 + \left(\frac{43}{4}\right)^2 \\
 &= \frac{2899}{4} + 390
 \end{aligned} \tag{8}$$

図1の直角三角形OGHの辺GHの長さpを、式(7)と式(8)から、次式で求める。

$$\begin{aligned}
 p^2 &= r^2 - h^2 = \left(\frac{2899}{4} + 390\right) - \left(\frac{57\sqrt{3}}{4}\right)^2 = \frac{8089}{16} \\
 p &= \frac{1}{4}\sqrt{8089}
 \end{aligned}$$

図1における弓形の弦の長さは、 $2p = \frac{1}{2}\sqrt{8089}$ となる。

ここで、 $1/22.9$ に縮尺していたのを元に戻すと、

$$\text{弦の長さ} = \frac{1}{2} \sqrt{8089} \times 22.9 = 0.5 \times 89.94 \times 22.9 = 1029.81$$

よって、出題の弦の長さは1029.8寸である。

