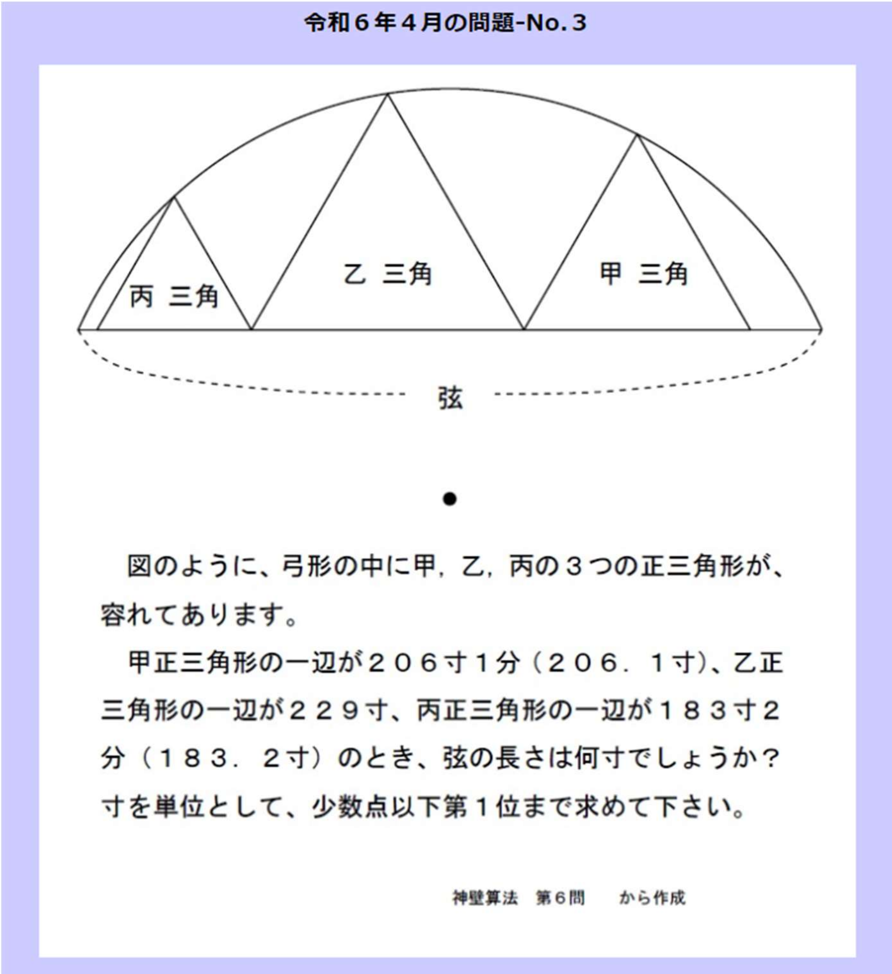
２０２４年４月９日
横田＠ＥＬ３科学アカデミー

群馬県和算研究会　令和６年４月の問題-№．３の解答



解答

計算の単純化のために、１／２２．９に縮尺して検討することにし、

甲正三角形の一辺をａ＝８，乙正三角形の一辺をｂ＝１０，丙正三角形の一辺をｃ＝９とする。

図１に示すように、弓形の円弧の半径をｒ、円弧の中心から弦までの距離をｈとする。

直角三角形ＯＡＤ、直角三角形ＯＢＥ、直角三角形ＯＣＦの斜辺の長さは、いずれもｒであり、次の関係がある。なお、直角三角形ＯＡＤの辺ＤＯの長さをｗとする。

直角三角形ＯＡＤについて、

$$r^2=\left(h+\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2+w^2=\left(h+\frac{\sqrt{3}}{2}\times 8\right)^2+w^2=h^2+8\sqrt{3}h+48+w^2 \qquad (1)$$

直角三角形ＯＢＥについて、

$$r^2 = \left(h + \frac{\sqrt{3}}{2}b\right)^2 + \left(w - \frac{1}{2}(a+b)\right)^2 = \left(h + \frac{\sqrt{3}}{2} \times 10\right)^2 + (w-9)^2$$

$$= h^2 + 10\sqrt{3}h + 156 + w^2 - 18w \qquad (2)$$

直角三角形ＯＣＦについて、

$$r^2 = \left(h + \frac{\sqrt{3}}{2}c\right)^2 + \left(w - \frac{1}{2}(a+2b+c)\right)^2 = \left(h + \frac{\sqrt{3}}{2} \times 9\right)^2 + \left(w - \frac{37}{2}\right)^2$$

$$= h^2 + 9\sqrt{3}h + 403 + w^2 - 37w \qquad (3)$$

式(1)と式(2)から、

$$h^2 + 8\sqrt{3}h + 48 + w^2 = h^2 + 10\sqrt{3}h + 156 + w^2 - 18w$$

$$8\sqrt{3}h + 48 = 10\sqrt{3}h + 156 - 18w$$

$$h = \sqrt{3}(3w - 18) \qquad (4)$$

式(1)と式(3)から、

$$h^2 + 8\sqrt{3}h + 48 + w^2 = h^2 + 9\sqrt{3}h + 403 + w^2 - 37w$$

$$8\sqrt{3}h + 48 = 9\sqrt{3}h + 403 - 37w$$

$$h = \sqrt{3}\left(\frac{37}{3}w - \frac{355}{3}\right) \qquad (5)$$

式(4)と式(5)から、

$$3w - 18 = \frac{37}{3}w - \frac{355}{3}$$

$$w = \frac{43}{4} \qquad (6)$$

式(6)を式(4)に代入すると、

$$h = \sqrt{3}(3w - 18) = \sqrt{3}\left(3 \times \frac{43}{4} - 18\right) = \frac{57\sqrt{3}}{4} \qquad (7)$$

式(6)と式(7)を式(1)に代入すると、

$$r^2 = h^2 + 8\sqrt{3}h + 48 + w^2 = \left(\frac{57\sqrt{3}}{4}\right)^2 + 8\sqrt{3}\left(\frac{57\sqrt{3}}{4}\right) + 48 + \left(\frac{43}{4}\right)^2$$

$$= \frac{2899}{4} + 390 \qquad (8)$$

図１の直角三角形ＯＧＨの辺ＧＨの長さｐを、式(7)と式(8)から、次式で求める。

$$p^2 = r^2 - h^2 = \left(\frac{2899}{4} + 390\right) - \left(\frac{57\sqrt{3}}{4}\right)^2 = \frac{8089}{16}$$

$$p = \frac{1}{4}\sqrt{8089}$$

図１における弓形の弦の長さは、$2p = \frac{1}{2}\sqrt{8089}$ となる。

ここで、１／２２．９に縮尺していたのを元に戻すと、

弦の長さ$=\frac{1}{2}\sqrt{8089}\times 22.9 = 0.5\times 89.94\times 22.9 = 1029.81$

よって、出題の弦の長さは１０２９．８寸である。

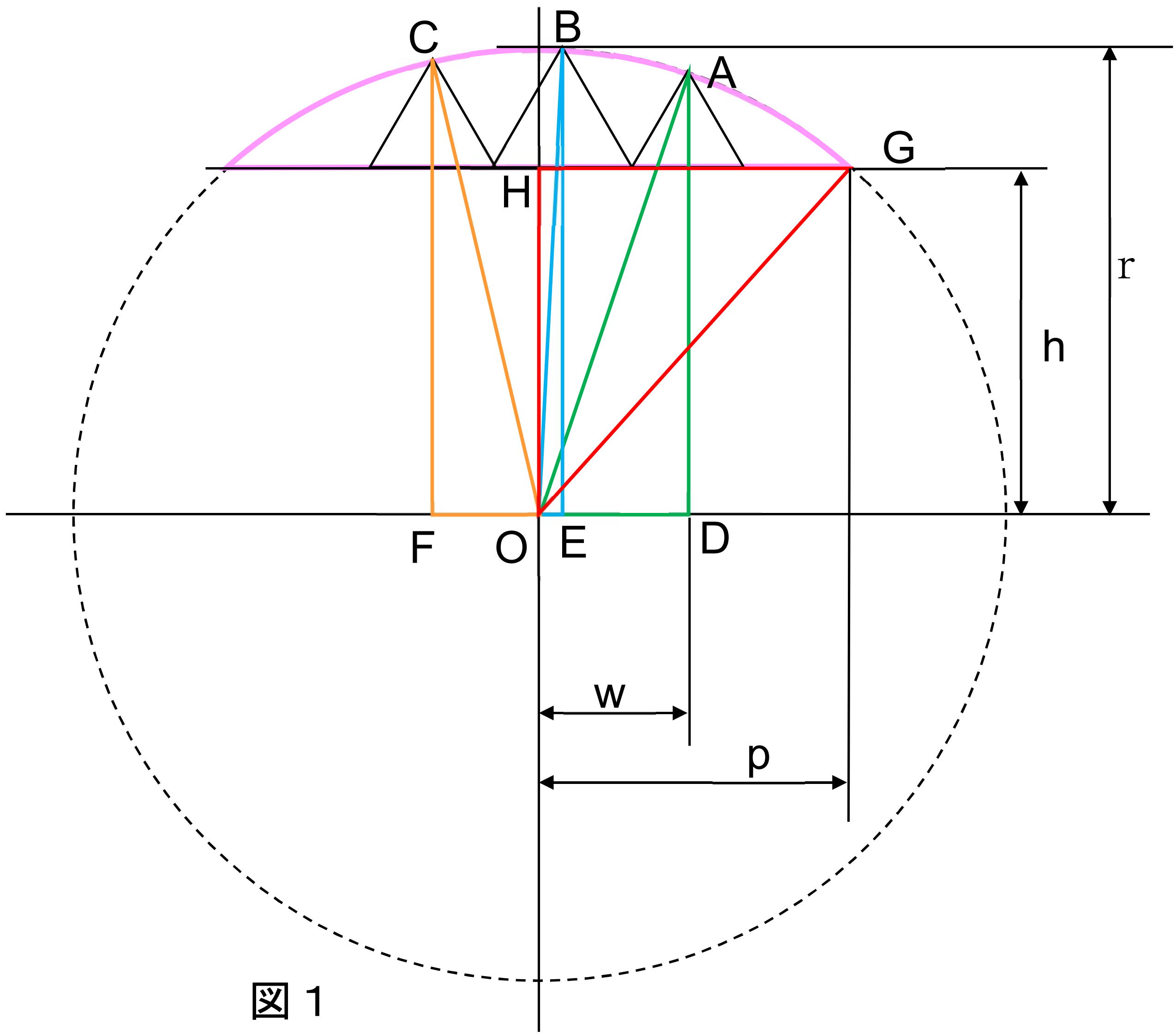


図１