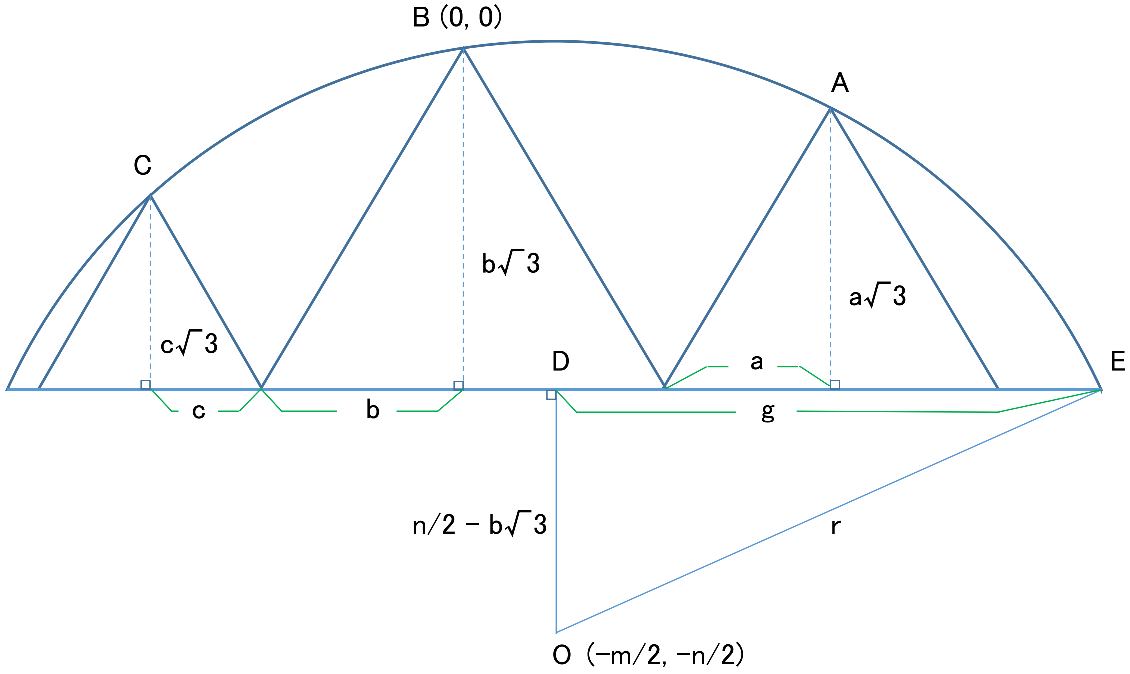
令和6年4月の問題ーNo.3



甲,乙,丙の正三角形の一辺の長さをそれぞれ 2a, 2b, 2c とし、弦の長さを 2g, 円弧の半径を r とする。

円弧上にある正三角形の頂点を図のように A, B, C とし、Bの座標を (0, 0) とすると、
Aの座標は (a+b, (a−b)√3), Bの座標は (−(b+c), (c−b)√3) となる。

円弧を含む円の方程式を $x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$ ———① とすると、

点Bを通るので、 $p = 0$ ———②

点Aを通るので、 $(a+b)^2 + 3(a-b)^2 + m(a+b) + n\sqrt{3}(a-b) = 0$ ———③

点Cを通るので、 $(b+c)^2 + 3(c-b)^2 - m(b+c) + n\sqrt{3}(c-b) = 0$ ———④

式③, ④より、

$$n = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\frac{a^2(b+c) + (a+b)c^2}{b^2 - ac} + 2b\right]$$

$$m = \frac{1}{b+c}\left[4\left(b^2 + c^2 - bc\right) + \sqrt{3}\cdot(c-b)n\right] = \frac{1}{b+c}\left[4\left(b^2 + c^2 - bc\right) + 2(c-b)\left[\frac{a^2(b+c) + (a+b)c^2}{b^2 - ac} + 2b\right]\right]$$

$$= \frac{2}{b+c}\left[2\left(b^2 + c^2 - bc\right) + 2b(c-b) + \frac{(c-b)\left[a^2(b+c) + (a+b)c^2\right]}{b^2 - ac}\right]$$

$$= \frac{2}{b+c}\left[\frac{2c^2\left(b^2 - ac\right) + a^2(c-b)(b+c) + (c-b)\cdot(a+b)\cdot c^2}{b^2 - ac}\right] = \frac{2}{b+c}\left[\frac{a^2(c-b)(b+c) + (b-a)\cdot(b+c)\cdot c^2}{b^2 - ac}\right]$$

$$m = 2\left[\frac{a^2(c-b) + (b-a)c^2}{b^2 - ac}\right] \qquad \text{———⑤}$$

$$n = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\frac{a^2(c-b) + (b-a)c^2}{b^2 - ac} + \frac{2a\left(ab + c^2\right)}{b^2 - ac} + 2b\right] \qquad \text{———⑥}$$

式①, ②より、 $\left(x + \frac{m}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{n}{2}\right)^2 = \left(\frac{m}{2}\right)^2 + \left(\frac{n}{2}\right)^2 \qquad r^2 = \left(\frac{m}{2}\right)^2 + \left(\frac{n}{2}\right)^2$

△ODEより、 $g^2 = r^2 - \left(\frac{n}{2} - \sqrt{3}\cdot b\right)^2 = \left(\frac{m}{2}\right)^2 + \left(\frac{n}{2}\right)^2 - \left[\left(\frac{n}{2}\right)^2 - \sqrt{3}\cdot bn + 3b^2\right] = \left(\frac{m}{2}\right)^2 + \sqrt{3}\cdot bn - 3b^2$

式⑤, ⑥を代入すると、

$$g^2 = \left[\frac{a^2(c-b) + (b-a)c^2}{b^2 - ac}\right]^2 + 2b\left[\frac{a^2(c-b) + (b-a)c^2}{b^2 - ac} + \frac{2a\cdot\left(ab + c^2\right)}{b^2 - ac} + 2b\right] - 3b^2$$

$$= \left[\frac{a^2(c-b) + (b-a)c^2}{b^2 - ac}\right]^2 + 2b\cdot\frac{a^2(c-b) + (b-a)c^2}{b^2 - ac} + b^2 + \frac{4ab\cdot\left(ab + c^2\right)}{b^2 - ac}$$

$$= \left[\frac{a^2(c-b) + (b-a)c^2}{b^2 - ac} + b\right]^2 + \frac{4ab\cdot\left(ab + c^2\right)}{b^2 - ac} = \frac{\left[a^2(c-b) + (b-a)c^2 + b\left(b^2 - ac\right)\right]^2 + 4ab\left(ab + c^2\right)\left(b^2 - ac\right)}{\left(b^2 - ac\right)^2}$$

$$2g = \frac{2 \cdot \sqrt{\left[a^2(c-b) + (b-a)c^2 + b\left(b^2 - ac\right)\right]^2 + 4ab\left(ab + c^2\right)\left(b^2 - ac\right)}}{b^2 - ac}$$

$a = \frac{206.1}{2}$　$b = \frac{229}{2}$　$c = \frac{183.2}{2}$　を代入すると、 2g ≒ 1029.8

∴弦の長さ＝1029.8寸