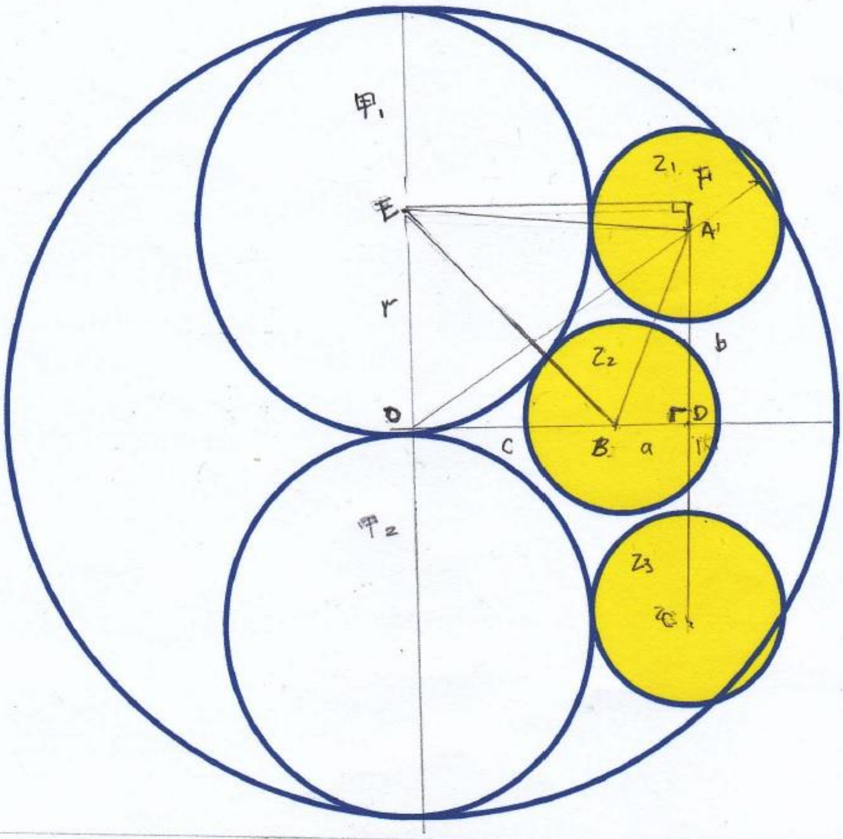
神奈川県　小山さん の 解法例

大宮氷川神社　　復元算額の問題

① 外円の中心をO、３個の乙円の中心を上から、それぞれA、B、Cとする。

② OBを通る線と、ACを通る線との交点をDとする。

③ 上下２個の甲円のうち、上側の甲円の中心をEとし、Eを通るODの平行線とACを通る線との交点をFとする。



線OE、線OB、線BD、線ADの長さを、それぞれr、c、a、bとする。また、乙円の直径が１寸なので、線ABの長さは１となる。
よって、以下の三平方の定理による式が成立する。

$$(c+a)^2+b^2=\left(2r-\frac{1}{2}\right)^2 \quad \cdots(1)$$

$$(c+a)^2+(r-b)^2=\left(r+\frac{1}{2}\right)^2 \quad \cdots(2)$$

$$r^2+c^2=\left(r+\frac{1}{2}\right)^2 \quad \cdots(3)$$

$$a^2+b^2=1^2 \quad \cdots(4)$$

（1）－（2）から　$2rb-r^2=3r^2-3r$

すなわち　$2rb=4r^2-3r$

$2r\neq 0$なので

$$b=2r-\frac{3}{2}\quad\cdots\cdots(5)$$

（5）を（1）に代入して

$$(c+a)^2=4r-2\quad\cdots(6)$$

ところで、

$(c+a)^2=c^2+a^2+2ac$　なので、（3）、（4）、（5）からc^2、a^2を消去すると

$$(c+a)^2=7r-4r^2-1+2ac$$

（6）から$(c+a)^2=4r-2$なので

$$4r^2-3r-1=2ac$$

両辺を２乗し、（3）、（4）、（5）からc^2、a^2を消去して整理すると

$$16r^4-8r^3-19r^2+5r+\frac{9}{4}=0$$

さらに両辺を 16 で割って　$r^4-\frac{1}{2}r^3-\frac{19}{16}r^2+\frac{5}{16}r+\frac{9}{64}=0$

ここで　$r=y+\frac{1}{8}$と置き換えて代入し整理すると、　$y^4-\frac{41}{32}y^2+\frac{657}{8^4}=0$

次に、$-\frac{41}{32}y^2+\frac{657}{8^4}$を右辺に移項し、両辺に$2ty^2+t^2$を加えると

$$(y^2+t)^2=\left(\frac{41}{32}+2t\right)y^2+t^2-\frac{657}{8^4}$$

$t=\frac{-41}{64}$　のとき

$$\left(y^2-\frac{41}{64}\right)^2=\frac{-41^2}{64^2}-\frac{657}{8^4}=\frac{1.024}{4.096}=\frac{1}{4}$$

右辺の$\frac{1}{4}$を左辺に移項し、因数分解して

$$\left(y^2-\frac{41}{64}-\frac{1}{2}\right)\times\left(y^2-\frac{41}{64}+\frac{1}{2}\right)=0$$

すなわち　$\left(y^2-\frac{73}{64}\right)\times\left(y^2-\frac{9}{64}\right)=0$

$$\therefore\ y=\pm\frac{\sqrt{73}}{8}\ 、\pm\frac{3}{8}$$

$y=r-\frac{1}{8}$なので

$$r=\frac{1\pm\sqrt{73}}{8}\ 、\frac{1}{2}\ 、\frac{-1}{4}$$

さらに　甲円 ＞乙円、すなわち　$r>\frac{1}{2}$　なので

$$\therefore\ r=\frac{1+\sqrt{73}}{8}$$

ゆえに

$$2r=\frac{1+\sqrt{73}}{4}$$

<終わり>