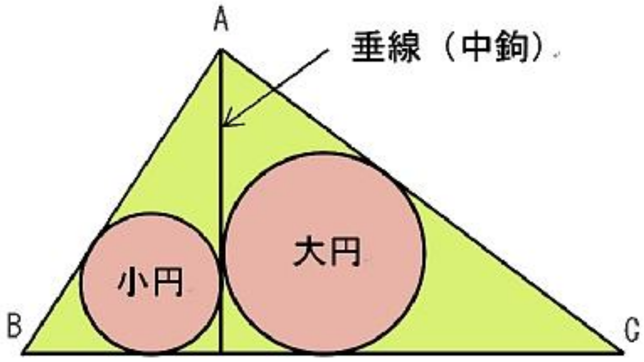
R2-10-Q2―HP　（『絵本工夫之錦』より）（★★★）

問題

図のように垂線（中鉤という）で仕切られた三角形内に直径 3 寸の大円と 2 寸の小円が容れてある。2 円径は変えずに中鉤の長さを変えると、三角形 ABC の面積も変化する。
面積が最小となる中鉤の長さはいくらか。
答　中鉤は 4.7385 余寸



解法

大円径 a、小円径 b、中鉤 x、底辺を m,n とする。

2 個の三角形の斜辺はそれぞれ、$\sqrt{x^2+m^2}$ ，$\sqrt{x^2+n^2}$ である。

大円径は、$a=x+m-\sqrt{x^2+m^2}$　したがって

$$m=\frac{a(2x-a)}{2(x-a)}$$

同様に、小円側について

$$n=\frac{b(2x-b)}{2(x-b)}$$

したがって三角形の面積 S は、

$$S=\frac{(m+n)x}{2}=\left\{\frac{a(2x-a)}{2(x-a)}+\frac{b(2x-b)}{2(x-b)}\right\}\frac{x}{2}=\frac{x(2x-b-a)(bx+ax-ab)}{4(x-a)(x-b)}$$

x で微分すると、$S'=0$　は、

$$2(a+b)x^4-4(a+b)^2x^3+(a+b)(a^2+9ab+b^2)x^2-2ab(a^2+4ab+b^2)x+a^2b^2(a+b)=0$$

となる。極小となるのは自明。

a=3、b=2　を代入すれば　$10x^4-100x^3+335x^2-444x+180=0$

これを数値的に解けば　x=4.73850　余寸　となる。