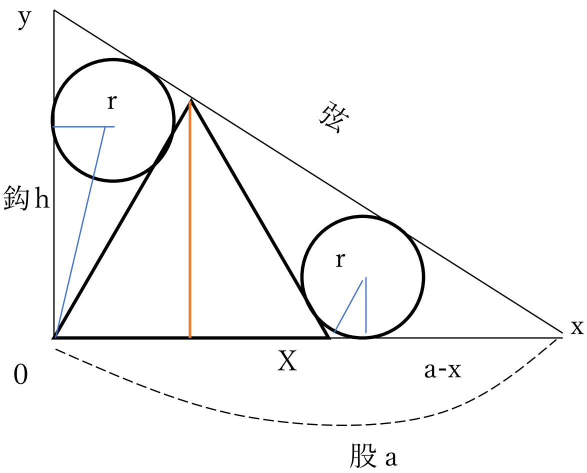
HP　R3-11 月問 2 解法例

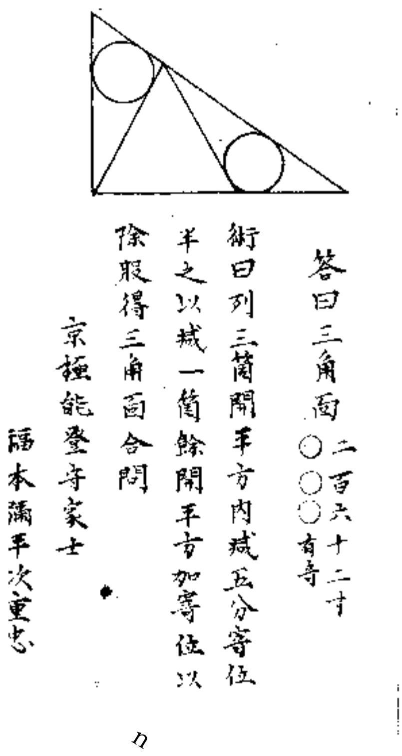
賽祠神算より　　★★★

股 a=487 寸から正三角形の辺長 X を求めよ。

答　263.000 余寸　（注意　写本では 262.00 とあるが誤記）

鈎を h、股を a、等円半径を r　とする。





解法　解析幾何

弦の式を　$\frac{x}{a}+\frac{y}{h}=1$　すなわち　$hx+ay-ah=0$　とする。

この直線は正三角形の頂点（X/2、√3X/2）を通るから

$$\frac{X}{2a}+\frac{\sqrt{3}X}{2h}=1 \quad \therefore \quad h=\frac{\sqrt{3}Xa}{2a-X} \qquad ①$$

左円中心（r,rk）（ $k=cot15°$）と直線との距離は r だから

$$r=\frac{-(hr+akr-ah)}{\sqrt{h^2+a^2}} \qquad \text{原点側負領域}$$

$$\therefore \quad r=\frac{ah}{ak+\sqrt{h^2+a^2}+h} \qquad ②$$

右円中心（$X+\frac{r}{\sqrt{3}},r$）と直線との距離は r だから

$$r=\frac{-\left\{h\left(X+\frac{r}{\sqrt{3}}\right)+ar-ah\right\}}{\sqrt{h^2+a^2}} \qquad ③$$

②＝③より

$$\therefore \quad \sqrt{3}a^2k-\sqrt{3}Xak-\sqrt{3}X\sqrt{h^2+a^2}+\sqrt{3}ah-ah-\sqrt{3}Xh-\sqrt{3}a^2=0$$

これに①を代入して整理すると、

$2\sqrt{3}a^2k-3^{\frac{3}{2}}Xak+\sqrt{3}X^2k-2\sqrt{3}X\sqrt{a^2-Xa+X^2}-2\sqrt{3}a^2+3Xa-3X^2=0$

さらに　$k=cot15°=2+\sqrt{3}$　を代入して整理すると、

$-2\sqrt{3}X\sqrt{a^2-Xa+X^2}+\left(2\sqrt{3}+6\right)a^2+\left(-2\ 3^{\frac{3}{2}}-6\right)Xa+2\sqrt{3}X^2=0$

根号式部分を平方して、因数分解すると、

$12a(a-X)\left(2\sqrt{3}a^2+4a^2-2\ 3^{\frac{3}{2}}Xa-8Xa+2\sqrt{3}X^2+5X^2\right)=0$

∴　$\left(2\sqrt{3}+5\right)X^2+\left(-6\sqrt{3}-8\right)aX+\left(2\sqrt{3}+4\right)a^2=0$

これを解けば

$$X=\frac{\pm\sqrt{6\sqrt{3}+11}+3\sqrt{3}+4}{2\sqrt{3}+5}a$$

$X=0.5400420539833038a$、$X=1.63293573878318a$　を得る。X<a であるから

$$X=\frac{-\sqrt{6\sqrt{3}+11}+3\sqrt{3}+4}{2\sqrt{3}+5}a \qquad ④$$

が解となる。股 a=487 寸なら辺長 X= 263.0004802 寸となる。

$\boxed{\text{術文との比較}}$

√3-0.5=寄位

股÷（√(1－寄/2)+ 寄）=三角面　X

$$∴\quad X=\frac{a}{\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}-\frac{1}{2}}{2}}+\sqrt{3}-\frac{1}{2}}$$

これは④と等価である。(合問)