令和 4 年 10 月の問題 - No.1

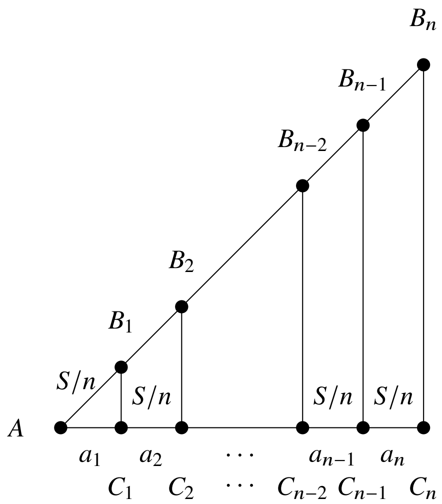
問題

図のように，直角三角形の面積を縦線で n 等分する．甲の長さが a 寸であるとき，乙の長さを n と a で表せ．

式：　乙の長さ =　？

上式を用い，$n = 10$，$a = 419$ 寸のときの乙の長さを求めよ．

図



解法

甲：$a_n = a$，乙：a_{n-1}とする．a_nと a_{n-1}の関係を求める．

直角三角形 $\triangle AB_nC_n$と $\triangle AB_1C_1$に着目する．その底辺の長さは $a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$と a_1である．

$\triangle AB_nC_n$の面積を S とすると，$\triangle AB_1C_1$の面積は S/n となる．

また，$\triangle AB_nC_n$と $\triangle AB_1C_1$は相似のため，その面積比は底辺の 2 乗となる．

ゆえに

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n)^2 : a_1^2 = S : \frac{S}{n}$$

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n = \sqrt{n} \cdot a_1$$

n と $n-1$ の場合を考え

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n &= \sqrt{n} \cdot a_1 \\ a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} &= \sqrt{n-1} \cdot a_1 \end{aligned}$$

2 式の差より

$$a_n = (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) \cdot a_1$$

同様に

$$a_{n-1} = (\sqrt{n-1} - \sqrt{n-2}) \cdot a_1$$

a_1を消去し

$$a_{n-1} = \frac{\sqrt{n-1} - \sqrt{n-2}}{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}} \cdot a_n$$

ちなみに，別の表記をすると

$$\begin{aligned} a_{n-1} &= \frac{(n-1)-(n-2)}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n-2}} \cdot \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}{(n)-(n-1)} \cdot a_n \\ &= \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n-2}} \cdot a_n \end{aligned}$$

$n = 10$，$a_{10} = 419$ より

$$a_9 = \frac{\sqrt{10} + \sqrt{9}}{\sqrt{9} + \sqrt{8}} \cdot 419 = 443.0001927 \cdots$$

答え

$$乙 = \frac{\sqrt{n-1} - \sqrt{n-2}}{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}} \cdot a = \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n-2}} \cdot a$$

乙 = 約 443 寸　($n = 10$)