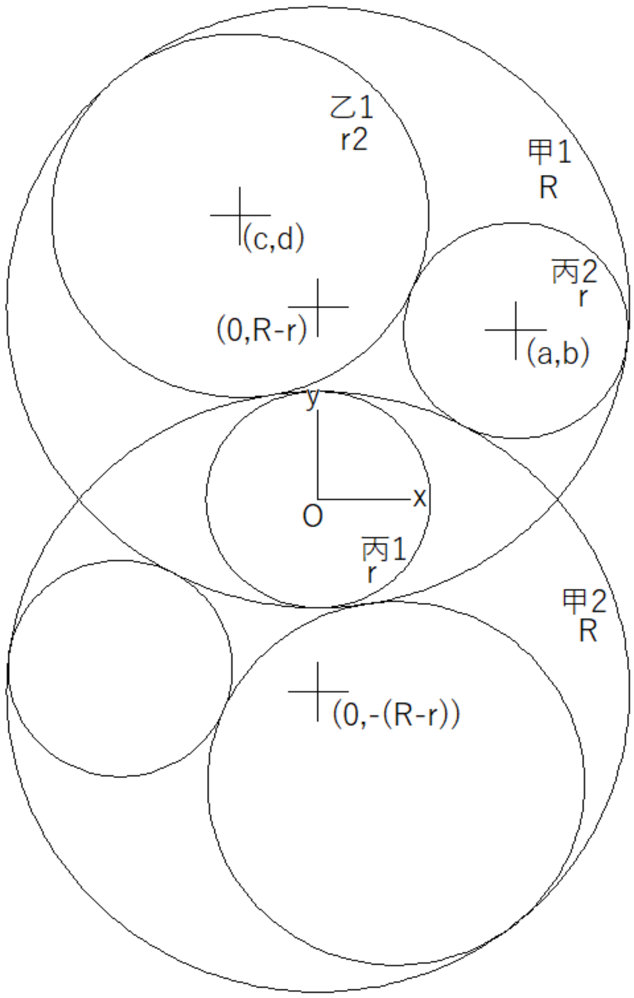
令和４年11月の問題-No.1　解法

甲円半径をR、乙円半径をr2、丙円半径をrとし、
以下のように丙円1の中心を原点とする座標系で考える。



甲円1,2の中心は接円を考えて上の図の通り(0,±(R-r))である。
丙円2の中心(a,b)を求める。丙円2は甲円2に外接、甲円1に内接する半径rの円なので

$$(x-0)^2+(y+(R-r))^2=(R+r)^2 \qquad (1)$$

$$(x-0)^2+(y-(R-r))^2=(R-r)^2 \qquad (2)$$

を(x,y)について解いて求める。

解のうちxが大きいものを丙円2の中心として

$$b = \frac{Rr}{R-r} \qquad (3)$$

$$a = \frac{\sqrt{Rr(2r^2 - 5Rr + 2R^2)}}{R-r} \qquad (4)$$

を得る。

乙円1は半径r2で甲円1に内接、甲円2に外接するので、その中心(c,d)は

$$(x-0)^2 + (y + (R-r))^2 = (R + r_2)^2 \qquad (5)$$

$$(x-0)^2 + (y - (R-r))^2 = (R - r_2)^2 \qquad (6)$$

を(x,y)について解くことで得られる。

$$d = \frac{Rr_2}{R-r} \qquad (7)$$

$$c = -\frac{\sqrt{r(2R-r)(r^2 - 2Rr - {r_2}^2 + R^2)}}{R-r} \qquad (8)$$

(注意)cは2つ得られるが符号が負のものが乙円1の中心として適切である。

(c,d)についてはr2の関数となっていることに注意する。
丙円2と乙円1が外接する条件を満たすr2を、以下の式をr2について解いて求める。

$$(a-c)^2 + (b-d)^2 = (r + r_2)^2 \qquad (9)$$

これをr2について解くと

$$r_2 = \frac{-r^3 + 4r^2R - 6rR^2 + 4R^3 + 2\sqrt{-2r^3R^3 + 9r^2R^4 - 12rR^5 + 4R^6}}{r^2 - 4Rr + 8R^2}$$

を得る。
甲円、丙円の直径をそれぞれD,dとすれば、

$$\text{乙円径} = \frac{-d^3 + 4Dd^2 - 6D^2d + 4D^3 + 2\sqrt{-2D^3d^3 + 9D^4d^2 - 12D^5d + 4D^6}}{d^2 - 4Dd + 8D^2}$$

となる。
D=100,d=36の時
乙円径=(144484+41000√7)/4181≒60.502225246寸
となる。